
Kapitel I

Zahlen

*Still, meine heil'ge Seele kräuselt sich
Dem Meere gleich, bevor der Sturm erscheint,
Und wie ein Seher möcht ich Wunder künden,
So rege wird der Geist in mir.*

Orplid

In diesem Kapitel beschreiben wir den Zahlbereich, auf den sich die Analysis gründet. Wir beginnen mit einem Axiomensystem, das sich schließlich im vorigen Jahrhundert herausgebildet hat. Erst im nächsten Kapitel werden wir im Vorbeigehen auch etwas über die Konstruktion dieses Zahlbereichs andeuten.

§ 1. Axiome

Diese Vorlesung handelt von der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen und den auf ihr oder ihren Teilmengen definierten Funktionen. Was sind reelle Zahlen? Ein Rechner wird sich eine reelle Zahl als meist unendliche Dezimalzahl, die noch ein Vorzeichen $+$ oder $-$ haben kann, vorstellen, wie zum Beispiel

3,1415926...

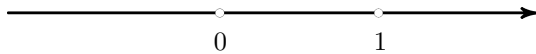
Freilich wissen wir wohl, daß die Darstellung reeller Zahlen durch Dezimalentwicklungen nicht ganz eindeutig ist, denn z.B.

$$0,9999\dots = 1,0000\dots$$

Und nur aus dem formalen Rechnen mit Dezimalzahlen gelingt es wohl kaum, die einfachsten algebraischen Rechenregeln zu begründen, wie zum Beispiel $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$. Man muß es nur versuchen und sieht bald, welches undurchdringliche Gestrüpp von Schwierigkeiten aus dem genannten scheinbar so geringen Mangel der Notation einer Zahl entsteht.

Dezimalzahlen sind sehr gut geeignet zum Rechnen, auch für Maß- und Geldsysteme — wenn sich auch manche Völker bis in unser Jahrhundert gegen so ein Produkt der Tyrannenwillkür gewehrt haben —, aber sie sind erstaunlich ungeeignet, mathematische Gesetze zu erhellen.

Wer eher geometrische Neigungen hat, wird die Menge der reellen Zahlen durch eine Gerade veranschaulichen, auf der die zwei verschiedenen Punkte 0 und 1 als Wahl von Ursprung und Maßeinheit markiert sind, und zwar aus alter Gewohnheit so, daß die 1 rechts von der 0 steht:



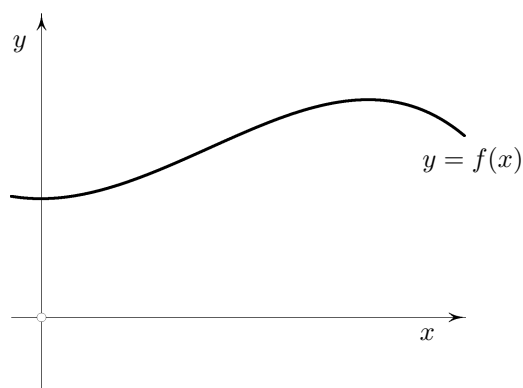
Eine **Funktion** oder **Abbildung** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eindeutig eine Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zu. Sie wird dann durch ihren **Graphen**

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

oder was das selbe ist, durch die Menge der Punkte

$$\{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

auf der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aller Punktepaare $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} =: \mathbb{R}^2$ veranschaulicht.



Solche Anschauung ist für das mathematische Denken notwendig als Leitstern für alle Begriffsbildung und Hilfe zum Finden und Verstehen der Sätze und Beweise. Einen formalen stichhaltigen Beweis kann sie jedoch nicht liefern.

Wir werden die reellen Zahlen dadurch beschreiben, daß wir ein Axiomensystem für die Menge \mathbb{R} mit den Operationen $+$ und \cdot sowie für die Anordnung $<$ angeben, also ein System von Sätzen, die immer vorausgesetzt werden und aus denen alles weitere folgt. Es bleibt dann freilich die Frage, ob es irgendwo in der Welt oder außerhalb derselben etwas gibt oder ob etwas ausdenkbar ist, das alle diese vorausgesetzten Axiome erfüllt. Diese Frage ist jedenfalls nicht Gegenstand dieser Vorlesung, die vielmehr darauf ausgeht, den Kalkül der Differential- und Integralrechnung zu erklären. Hierfür ist ein bereitwilliges Vertrauen in die Anfangsgründe eher hilfreich. Hat man erst einmal eine gewisse Übung im Umgang mit dem Begriff der Konvergenz, so ergibt sich ein Teil der Antwort auf die Frage, wie die reellen Zahlen zu konstruieren und die Axiome zu rechtfertigen seien, beinahe von selbst; und danach ist der Weg hinab in die Verästelungen möglichen Zweifels ebenso unendlich, wie der Weg hinauf, den wir beschreiten wollen.

Wen es aber sogleich hinabzieht, dem sei als Wegweiser ein vielbekanntes, sehr elementares Buch empfohlen:

E. Landau: Grundlagen der Analysis. Nachdruck Chelsea 1965.

*

Axiomensystem für die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen bilden eine Menge \mathbb{R} , mit den **Verknüpfungen**:

Addition: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y;$

Multiplikation: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y;$

sowie einer **Anordnung**, gegeben durch eine Teilmenge, den

Positivitätsbereich $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$.

Für diese Daten gilt:

(K) **Körperaxiome:**

Die Menge \mathbb{R} mit Addition und Multiplikation bildet einen **Körper**.

(A) **Axiome der Anordnung:**

(A.1) Es gilt genau eine der Aussagen:

$$x \in \mathbb{R}_+, \quad -x \in \mathbb{R}_+, \quad x = 0.$$

$$(A.2) \quad x, y \in \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad x + y \in \mathbb{R}_+.$$

$$(A.3) \quad x, y \in \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad x \cdot y \in \mathbb{R}_+.$$

(V) **Vollständigkeitsaxiom:**

Jede nicht leere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke.

*

Was das Axiomensystem (A) mit Anordnung zu tun hat, werden wir im nächsten Paragraphen erfahren. Das Vollständigkeitsaxiom wird in § 4 erklärt. Die Körperaxiome aber lauten wie folgt:

Körperaxiome

Für die Addition und Multiplikation aller $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

Addition

Multiplikation

Assoziativgesetz

$$(x + y) + z = x + (y + z). \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Kommutativgesetz

$$x + y = y + x. \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Einheit und Inverses

Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$,

sodaß $x + 0 = x$,

und sodaß für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein
“negatives” $(-x) \in \mathbb{R}$ existiert,

mit der Eigenschaft

$$x + (-x) = 0.$$

Es gibt ein Element $1 \neq 0$ in \mathbb{R}

mit $1 \cdot x = x$,

und sodaß für jedes $x \neq 0$ in \mathbb{R}

ein “inverses” $x^{-1} \in \mathbb{R}$ existiert,

mit der Eigenschaft

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Distributivgesetz

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Die Körperaxiome werden in der Linearen Algebra ausgiebig besprochen. Wir fassen das Ergebnis dahingehend zusammen, daß man unbekümmert mit der Addition und Multiplikation verfahren darf, wie man es gewohnt ist. Insbesondere schreiben wir $x - y$ für $x + (-y)$ und $x : y$ oder $\frac{x}{y}$ für $x \cdot y^{-1}$. Auch lassen wir den Malpunkt häufig weg und sparen viele Klammern durch die Regel: Punktrechnung vor Strichrechnung. Wohlgemerkt, diese Regel spricht keine Erkenntnis aus, sondern nur eine Konvention, eine Vereinbarung, um die Notation einfach zu halten.

Für Summen oder Produkte mit vielen Gliedern benutzen wir die Bezeichnung:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n =: \sum_{\nu=1}^n x_\nu =: \sum_{\nu \in \{1, \dots, n\}} x_\nu;$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n =: \prod_{\nu=1}^n x_\nu =: \prod_{\nu \in \{1, \dots, n\}} x_\nu.$$

$x^n := x \cdot \dots \cdot x$, n gleiche Faktoren x .

Ein Gleichheitszeichen mit Doppelpunkt $:=$ bedeutet, daß der Term auf Seiten des Doppelpunkts durch den andern definiert wird. Ähnlich ist das Zeichen \iff : zu lesen als logische Äquivalenz nach Definition dessen, was auf Seiten des Doppelpunktes steht.

§ 2. Anordnung

Durch die Körperaxiome allein sind die reellen Zahlen nicht definiert, ja es ist dadurch nicht einmal ausgeschlossen, daß

$$1 + 1 = 0$$

ist. Dieses verträge sich jedoch nicht mit den Anordnungs-Axiomen, wie wir gleich sehen werden.

Die Elemente von \mathbb{R}_+ heißen **positiv**. Durch Auszeichnung der positiven Zahlen wird eine Reihenfolge aller Zahlen, eine Anordnung von \mathbb{R} festgelegt. Nach Definition gilt:

$$x < y \quad : \iff \quad y > x \quad : \iff \quad y - x \in \mathbb{R}_+.$$

$$x \leq y \quad : \iff \quad y \geq x \quad : \iff \quad x < y \quad \text{oder} \quad x = y.$$

Sprich: x **kleiner** y , und y **größer** x ,

bzw.: x **kleinergleich** y , und y **größergleich** x .

Die Axiome der Anordnung sind dann durch die folgenden Regeln zu übersetzen, mit denen wir fortan immer rechnen und abschätzen werden:

(2.1) Anordnungseigenschaften.

(Ver) Vergleichbarkeit, es gilt genau eine der Aussagen:

$$x < y \quad \text{oder} \quad x = y \quad \text{oder} \quad x > y.$$

(Tr) Transitivität: $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$.

(Ad) Verträglichkeit mit der Addition:

$$x < y \quad \text{und} \quad z \leq w \Rightarrow x + z < y + w.$$

(Mul)₊ Verträglichkeit mit der Multiplikation:

$$x < y \quad \text{und} \quad z > 0 \Rightarrow xz < yz.$$

(Neg) $x < y \Rightarrow -x > -y$.

Dieselben Regeln gelten, wenn man $<, >$ durch \leq, \geq ersetzt, bis auf die erste, welche dann lautet:

(Verg) $x \leq y$ oder $y \geq x$.

$$x \leq y \quad \text{und} \quad y \leq x \Rightarrow x = y.$$

Beweis: Man muß nur die obige Definition einsetzen.

(Ver) heißt: $y - x \in \mathbb{R}_+$ oder $y - x = 0$ oder $x - y = -(y - x) \in \mathbb{R}_+$, siehe (A1).

(Tr) Aus $y - x \in \mathbb{R}_+$ und $z - y \in \mathbb{R}_+$ folgt nach (A2) $z - x \in \mathbb{R}_+$, also $x < z$.

(Ad) Für $z < w$ bedeutet diese Regel:

$$y - x \in \mathbb{R}_+ \quad \text{und} \quad w - z \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow y + w - (x + z) \in \mathbb{R}_+.$$

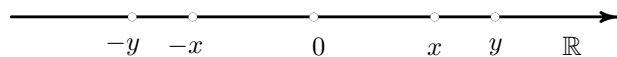
Für $z = w$ ist die Regel ebenso offenbar.

(Mul)₊ $y - x \in \mathbb{R}_+$ und $z > 0 \Rightarrow yz - xz \in \mathbb{R}_+$, also $xz < yz$.

(Neg) folgt aus (Ad), man addiere beidseits $(-y - x)$ und erhält:

$$x < y \iff -y - x + x < -y - x + y, \text{ also } -y < -x.$$

Die Regel hat wie alle eine unmittelbar anschauliche Bedeutung:



□

Wir können noch folgende Rechenregel anfügen:

$$(\text{Mul})_- : \quad x < y \quad \text{und} \quad z < 0 \quad \Rightarrow \quad xz > yz.$$

Beweis: Es folgt ja $-z > 0$, also $-zx < -zy$ und nach (Neg), indem man $(-zx)$ für x einsetzt und $(-zy)$ für y , folgt dann $zx > zy$. \square

Nicht jeder Körper läßt sich anordnen, sodaß die Axiome der Anordnung erfüllt sind, denn die Anordnung hat auch Konsequenzen für das, was sich beim Addieren und Multiplizieren ergeben kann, zum Beispiel:

(2.2) Bemerkung. *Ist $x \neq 0$, so ist $x^2 > 0$. Insbesondere ist also $1 = 1^2 > 0$, und daher $-1 < 0$, also $-1 \neq x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Ist $x > 0$, so ist $x^2 > 0$ nach (Mul). Ist $x < 0$, so $(-x) > 0$, also $(-x)^2 = x^2 > 0$. \square

Im Körper der komplexen Zahlen (Kap IV, §5) gibt es eine Zahl i , sodaß $i^2 = -1$, und daher läßt sich dieser Körper nicht so anordnen, daß die Axiome der Anordnung erfüllt sind.

Den additiven Regeln entsprechen für positive Zahlen wegen der Analogie der Axiome ähnliche multiplikative Regeln:

$$(\text{Inv. 1}) \quad x > 0 \iff x^{-1} > 0.$$

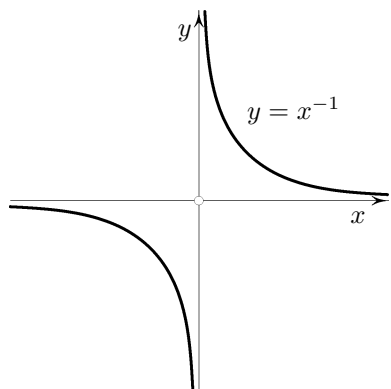
Beweis: Multiplikation mit den positiven Zahlen $(x^{-1})^2$ bzw. x^2 . \square

(Inv. 2) Sei $xy > 0$, dann gilt:

$$x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}.$$

Beweis: Multiplikation mit $(xy)^{-1}$ bzw. xy . □

Die Aussage bedeutet, daß die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ monoton fällt, wenn man nicht über $x = 0$ hinweggeht.



Alle diese Rechnungen liefern nichts, was man nicht auch unmittelbar sieht, und man wird sich die abgeleiteten Regeln darum auch nicht merken sondern sich in jedem Fall unmittelbar klar machen. Der Witz der Beweise liegt nur darin, daß die Rechenregeln aus den Axiomen folgen.

Die Operationen $+$, $-$, \cdot , $:$ und in gewissem Maße auch die Anordnung induzieren ähnliche Operationen für Teilmengen M, N von \mathbb{R} , nämlich:

$$M + N := \{x + y \mid x \in M, y \in N\};$$

$$M \cdot N := \{x \cdot y \mid x \in M, y \in N\};$$

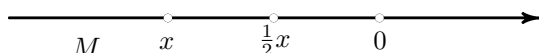
$$x \leq M :\iff x \leq y \quad \text{für alle } y \in M,$$

und entsprechend $x \geq M$, $M \leq x$, $>$, $<$.

Viele Eigenschaften vererben sich auf Teilmengen, aber nicht alle, zum Beispiel gibt es zu einer Menge M im allgemeinen keine negative N , sodaß $M + N$ in irgend einem Sinne Null wäre. Manche Teilmengen besitzen ein größtes Element, aber nicht alle, die Menge

$$M := \{x \mid x < 0\}$$

zum Beispiel nicht; ist nämlich $x \in M$, so auch $\frac{1}{2}x$, und $\frac{1}{2}x > x$.



Immerhin können wir erklären, was das größte Element einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ sein soll, das **Maximum** von M , ohne die Existenz zu behaupten:

$$x = \max(M) : \Leftrightarrow x \in M \text{ und } M \leq x.$$

$$x = \min(M) : \Leftrightarrow x \in M \text{ und } x \leq M.$$

Wenn das Maximum existiert, ist es eindeutig bestimmt, denn wenn x, y die Definition erfüllen, so folgt $x, y \in M$, $y \leq x$ und $x \leq y$, also $x = y$. Ähnlich fürs Minimum.

(2.3) Rechenregeln fürs Maximum und Minimum.

- (i) $M \subset N \implies \max(M) \leq \max(N)$.
- (ii) $\max(M + N) = \max(M) + \max(N)$.
- (iii) Sind $M, N \geq 0$, so gilt: $\max(M \cdot N) = \max(M) \cdot \max(N)$.
- (iv) $\min(M) = -\max(-M)$.
- (v) $\max(M \cup N) = \max\{\max M, \max N\}$.
- $\min(M \cup N) = \min\{\min M, \min N\}$.

Diese Regeln bedeuten: Falls die rechte Seite existiert, existiert die linke Seite, und die Gleichung gilt.

Beweis:

- (i) Natürlich, es werden mehr Elemente zur Konkurrenz zugelassen, genauer: $\max(M) = x \in M \Rightarrow x \in N \Rightarrow x \leq \max(N)$.
- (ii) Sind $x \in M$, $y \in N$, so ist $x \leq \max(M)$, $y \leq \max(N)$, also $x + y \leq \max(M) + \max(N)$, also gilt

$$M + N \leq \max(M) + \max(N),$$

damit, weil $\max(M) \in M$, $\max(N) \in N$, nach Definition des Maximums

$$\max(M + N) = \max(M) + \max(N).$$

- (iii) folgt genau analog.
- (iv) Offenbar $-\max(-M) \in M$. Zu zeigen $-\max(-M) \leq M$.
Sei also $y \in M$, $\Rightarrow -y \in -M \Rightarrow \max(-M) \geq -y \Rightarrow -\max(-M) \leq y$.
- (v) ist auch leicht. □

Jetzt kommen wir zu der Definition, auf der alle Analysis, nämlich der Begriff der Konvergenz beruht, und auch zu den ersten Regeln, die man sich merken muß:

Definition (Betrag):

$$\text{Betrag von } x := x \text{ absolut} := |x| := \max\{x, -x\}.$$

Dieses Maximum existiert natürlich, wie überhaupt das Maximum einer endlichen Menge.

(2.4) Rechenregeln für den Betrag.

(i) $|x| \geq 0; \quad |x| = 0 \iff x = 0.$

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \quad \text{insbesondere } |-x| = |x|, \quad |x/y| = |x|/|y|.$

(iii) **Dreiecksungleichung:** $|x + y| \leq |x| + |y|,$

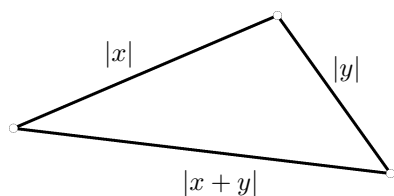
also $|x - y| \geq ||x| - |y||, \text{ und } |x + y| \geq ||x| - |y||.$

Beweis:(i) $x \geq 0$ oder $-x \geq 0$, und weil $-x = 0 \iff x = 0$, folgt aus $x = 0$ jedenfalls $|x| = 0$, und ebenso folgt daraus $x = 0$.(ii) $|x| \cdot |y| = xy$ oder $-xy$, und es ist größergleich 0, also gleich $\max\{xy, -xy\} = |xy|$. Setzt man $y = -1$, also $|y| = 1$, so folgt $|-x| = |x|$. Auch folgt $|x/y| \cdot |y| = |x|$, also (ii).

(iii) $|x| + |y| = \max(\{x, -x\} + \{y, -y\})$
 $= \max\{x + y, -(x + y), x - y, y - x\}$
 $\geq \max\{x + y, -(x + y)\} = |x + y|.$

Das ist die erste Ungleichung. Aus ihr folgt $|x - y| + |y| \geq |x - y + y| = |x|$, und wenn man beidseits $|y|$ subtrahiert: $|x - y| \geq |x| - |y|$. Vertauscht man hier x und y , so bleibt die linke Seite unverändert, also $|x - y| \geq |y| - |x| = -(|x| - |y|)$. Zusammen folgt $|x - y| \geq ||x| - |y||$, und ersetzt man hier y durch $-y$, so folgt die letzte Ungleichung. \square

In höherer Dimension besagt die Dreiecksungleichung, daß zwei Seiten eines Dreiecks zusammen immer mindestens so lang wie die dritte sind.



In der Dimension eins degeneriert das Dreieck zu drei Punkten auf der Geraden, aber die Aussage bleibt richtig und wichtig.

Wir bemerken noch: $x > 1 \iff x = 1 + \delta$ mit $\delta > 0$, und $0 < x < 1 \iff x = \frac{1}{1+\delta}$, mit $\delta > 0$. Diese triviale Umformung hilft oft.

§ 3. Natürliche Zahlen

Eigentlich beginnt wohl das mathematische Denken damit, daß der Geist den allgemeinen Begriff einer Vielheit als natürliche Zahl faßt, und dieser erste Traum der Mathematiker bleibt auch ihr schönster. Wenn wir hier nun die natürlichen Zahlen aus den reellen herausholen, so wollen wir damit nur darauf hinweisen, daß auch sie in den Axiomen mit gefordert sind, und nicht noch zusätzlich hervorgezaubert werden müssen. Die Menge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ der natürlichen Zahlen besteht aus den Zahlen $1, 2, 3, \dots$. Fügt man 0 hinzu, so hat man $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Aber hier sind sich die Mathematiker nicht einig, manche halten auch 0 für natürlich. Wenn nun jemand vorgibt, er wisse nicht, wie es bei den drei Punkten weitergeht, so bediene er sich der folgenden

Definition der natürlichen Zahlen. Die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ist die kleinste Teilmenge von \mathbb{R} , für welche gilt:

- (A) $1 \in \mathbb{N}$;
- (S) Ist $x \in \mathbb{N}$, so auch $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Daß es Teilmengen von \mathbb{R} gibt, die (A) und (S) erfüllen, ist offenbar, zum Beispiel \mathbb{R} selbst, oder auch \mathbb{R}_+ . Daß unter diesen Teilmengen \mathbb{N} die kleinste ist, bedeutet:

Induktionsprinzip. *Angenommen, für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ gilt:*

(A) $1 \in M$.

(S) *Ist $x \in M$ für ein x , so auch $x + 1 \in M$.*

Dann gilt: $\mathbb{N} \subset M$.

Um sich als Logiker davon zu überzeugen, daß es eine solche kleinste Teilmenge von \mathbb{R} gibt, die (A) und (S) erfüllt, betrachtet man alle solchen Teilmengen von \mathbb{R} und erklärt \mathbb{N} als ihren Durchschnitt. Das mag Ihnen etwas unfair vorkommen, daß man sich auf alle Teilmengen von \mathbb{R} beruft, um damit eine bestimmte erst zu definieren; aber so halten es die Mathematiker.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ beschreiben wir durch eine ihren Elementen gemeinsame Eigenschaft; wenn uns nichts besseres einfällt, die Eigenschaft, Element von M zu sein. Umgekehrt gehört zu einer wohlklärten Eigenschaft von Zahlen die Teilmenge der Elemente, die diese Eigenschaft haben. Formulieren wir das Induktionsprinzip für Eigenschaften (Behauptungen über Zahlen) statt Teilmengen, so erhalten wir:

Prinzip der vollständigen Induktion. *Angenommen, von der Behauptung $B(n)$ über beliebige natürliche Zahlen n ist folgendes bekannt:*

(A) $B(1)$, d.h. die Behauptung gilt für die Zahl 1.

(S) $B(n) \Rightarrow B(n + 1)$, d.h. wenn die Behauptung für eine Zahl n gültig ist (Induktionsannahme), dann gilt sie auch für die folgende Zahl $n + 1$ (Induktionsschritt).

Dann folgt, daß die Behauptung für alle natürlichen Zahlen gilt.

Die Teilmenge $\{x \mid B(x)\}$ aller Zahlen mit der Eigenschaft B erfüllt nämlich (A) und (S), umfaßt also \mathbb{N} .

Es ist klar, was das Prinzip eigentlich bedeutet, man lasse nur den “Induktionsschluß” (S) immer laufen:

$$\begin{array}{llll} B(1) & \text{wegen} & (A) & \\ B(2) & \text{wegen} & (S) & \text{mit } n = 1 \\ B(3) & \text{wegen} & (S) & \text{mit } n = 2 \\ B(4) & \text{wegen} & (S) & \text{mit } n = 3 \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Das Induktionsprinzip dient ebenso auch, um Definitionen für natürliche Zahlen zu erklären: Man definiert zunächst $B(1)$, und dann $B(n+1)$ unter Zuhilfenahme der Aussage $B(n)$. Zum Beispiel wäre eine formale Definition von endlichen Summen und Produkten so zu fassen: Zu definieren:

$$\begin{array}{ll} \sum_{k=1}^n a_k & \prod_{k=1}^n a_k \\ \text{(A)} \quad \sum_{k=1}^1 a_k := a_1, & \prod_{k=1}^1 a_k := a_1, \\ \text{(S)} \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + a_{n+1}. & \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot a_{n+1}. \end{array}$$

Wenn man statt $B(1)$ im Induktionsprinzip $B(k)$ für eine gewisse Zahl k beweist (oder definiert), so ist nachher auch nur $B(n)$ für $n \geq k$ bewiesen (bzw. definiert). Das führt man leicht auf das obige Induktionsprinzip zurück, denn die Aussage “ $B(n)$ für $n \geq k$ ” folgt danach leicht. Wir üben den Gebrauch des Prinzips an Beispielen:

(3.1) Bemerkung. *Jede endliche Menge reeller Zahlen enthält ein Maximum.*

Beweis: Wir fassen die Behauptung so:

Ist $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge von n Elementen, so existiert $\max(M)$.

- (A) $n = 1$, also $M = \{x\}$ für ein $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \max(M) = x$.
 (S) Sei $M = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$, und die Behauptung sei für Mengen mit n Elementen vorausgesetzt. Dann existiert also die Zahl $\max\{x_1, \dots, x_n\}$, und man findet leicht

$$\max\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = \max\{x_{n+1}, \max\{x_1, \dots, x_n\}\}. \quad \square$$

(3.2) Satz. *Eine natürliche Zahl ist stets größer als Null.*

Beweis durch Induktion:

- (A) $1 > 0$, wie wir schon wissen.
 (S) Sei schon $n > 0$, dann folgt $n + 1 > 1 > 0$, also $n + 1 > 0$.
□

Insbesondere ist eine natürliche Zahl nicht Null, und um das zu sehen, braucht man wirklich mehr als nur die Körperaxiome. Auch gilt $n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn $1 \geq 1$, und $n \geq 1 \Rightarrow n + 1 \geq 1 + 1 > 1$.

$$(3.3) \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis:

(A) $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

(S) $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + n + 1 =$ (Induktionsannahme)

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \square$$

(3.4) Satz. *Seien M und N Mengen mit n Elementen. Die Anzahl der Bijektionen $M \rightarrow N$ ist $n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. (sprich: n -fakultät).*

Eine Abbildung $M \rightarrow N$ heißt **bijektiv** (Bijektion), wenn sie **injektiv** ist (verschiedene Elemente von M haben verschiedene Bilder) und **surjektiv** (jedes Element von N ist ein $f(m)$ für ein $m \in M$).

Beweis durch Induktion nach n :

Ist $n = 1$, so gibt es genau $1 = 1!$ Bijektionen $M \rightarrow N$.

(S) Sei nun $M = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$, $N = \{y_1, \dots, y_{n+1}\}$, und alle x_k bzw. y_k seien verschieden. Ist $f : M \rightarrow N$ eine Bijektion, so ist $f(x_{n+1}) \in N$, und hierfür gibt es $n + 1$ mögliche Wahlen, und bei jeder Wahl von $f(x_{n+1})$ ist $f : M \setminus \{x_{n+1}\} \rightarrow N \setminus \{f(x_{n+1})\}$ eine Bijektion, wofür es nach Induktionsvoraussetzung $n!$ mögliche Wahlen gibt. Im ganzen gibt es also $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ Bijektionen. (Für zwei Mengen B, C bezeichnet $B \setminus C$ die Menge der Elemente von B , die nicht in C sind). \square

Insbesondere gibt es $n!$ Bijektionen $M \rightarrow M$, die man auch als **Permutationen** bezeichnet. Der Satz bleibt richtig, wenn wir noch definieren:

$$0! := 1.$$

Übrigens wächst $n!$ sehr schnell, z.B. $13! \approx 6 \cdot 10^9$; um die Anzahl der Permutationen von 13 Elementen zu zählen, müßte man 100 Jahre zählen, wenn man in einer Minute bis 100 zählen könnte.

Nach Leibniz erklären wir die **Binomialkoeffizienten**

$$(k, \ell) := \binom{k + \ell}{\ell} := \frac{(k + \ell)!}{k! \ell!}.$$

Die Bezeichnung $\binom{n}{\ell}$, $n = k + \ell$, ist weithin üblich, aber die Bezeichnung (k, ℓ) zeigt besser die Symmetrie $(k, \ell) = (\ell, k)$. Die Bedeutung dieser Funktion zeigt folgender

(3.5) Satz. *Eine Menge mit $k + \ell$ Elementen hat (k, ℓ) Teilmengen von k Elementen. Insbesondere ist (k, ℓ) stets ganz.*

Beweis durch Induktion nach $n = k + \ell$:

Ist $n = 0$, so ist $\binom{n}{0} = \frac{0!}{0!} = 1$, und der Satz ist richtig. Sei jetzt M eine Menge von $n + 1$ Elementen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA)

$$M = \{1, \dots, n + 1\}.$$

Eine Teilmenge von k Elementen enthält entweder $n + 1$, oder nicht. Im ersten Fall ist sie durch Wahl einer Teilmenge von $k - 1$ Elementen in $\{1, \dots, n\}$ gegeben, wovon es nach Induktionsannahme

$$(k - 1, \ell)$$

gibt, im zweiten Fall ist sie selbst eine Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$, wovon es wiederum nach Induktionsannahme

$$(k, \ell - 1)$$

gibt. Zusammen also gibt es $(k - 1, \ell) + (k, \ell - 1)$ Teilmengen von k Elementen in M , und wir haben zu zeigen

$$(3.6) \quad (k - 1, \ell) + (k, \ell - 1) = (k, \ell),$$

oder in der andern Schreibweise

$$\binom{n - 1}{\ell} + \binom{n - 1}{\ell - 1} = \binom{n}{\ell}.$$

Die linke Seite von (3.6) ist nach Definition

$$\frac{(k + \ell - 1)!}{(k - 1)! \ell!} + \frac{(k + \ell - 1)!}{k! (\ell - 1)!} = \frac{(k + \ell - 1)! (k + \ell)}{k! \ell!} = (k, \ell),$$

was zu zeigen war. Die Formel gilt auch für $k = 0$. □

Der Satz bleibt richtig, wenn man noch definiert:

$$(k, \ell) := 0 \quad \text{falls} \quad k \in -\mathbb{N} \quad \text{oder} \quad \ell \in -\mathbb{N}.$$

Natürlich lehrt ein Induktionsbeweis nur, daß ein Satz gilt, nicht aber, wie man darauf kommt. In diesem Falle könnte man wie folgt argumentieren: Um eine Teilmenge von k Elementen aus $N = \{1, \dots, n\}$

auszuwählen, ordne ich N irgendwie an und nehme dann die ersten k . Zur Anordnung von N gibt es $n!$ Möglichkeiten, aber die $k! \cdot (n-k)!$, die aus einer Anordnung durch Umordnung der ersten k und der letzten $n-k$ Elemente entstehen, liefern dieselbe Teilmenge von k Elementen, sodaß ich bei den $n!$ Anordnungen von N jede Teilmenge von k Elementen $k! \cdot (n-k)!$ mal gezählt habe.

(3.7) Binomischer Lehrsatz. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in N_0$. Es gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k+\ell=n}} (k, \ell) x^k y^\ell.$$

Beweis:

$$(A) \quad (x+y)^1 = (1, 0) x^1 y^0 + (0, 1) x^0 y^1.$$

$$(S) \quad (x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y) \stackrel{(A)}{=} \left(\sum_{k+\ell=n} (k, \ell) x^k y^\ell \right) (x+y) =$$

$$\sum_{k+\ell=n} (k, \ell) x^{k+1} y^\ell + \sum_{k+\ell=n} (k, \ell) x^k y^{\ell+1}.$$

Setze in der linken Summe $k+1 = p$ und $\ell = q$, und in der rechten Summe $k = p$, $\ell+1 = q$, dann steht da:

$$\sum_{\substack{p+q=n+1 \\ 1 \leq p \leq n+1}} (p-1, q) x^p y^q + \sum_{\substack{p+q=n+1 \\ 1 \leq q \leq n+1}} (p, q-1) x^p y^q.$$

Hier darf man aber die fehlenden Summanden mit $p=0$ in der ersten bzw. $q=0$ in der zweiten Summe hinzufügen, denn

$$(-1, q) = (p, -1) = 0.$$

Man erhält also

$$\sum_{p+q=n+1} ((p-1, q) + (p, q-1)) x^p y^q = \sum_{p+q=n+1} (p, q) x^p y^q$$

nach Formel (3.6), was zu zeigen war. \square

Bei diesen Umformungen wird immer der eine oder andere stutzig und fragt: Ja geht denn das, darf man k und ℓ in der einen Summe anders umbenennen als in der anderen? Es geht, es ist ganz in Ordnung, der Summationsindex hat nur die Aufgabe, nacheinander die vorgeschriebenen Zahlen zu durchlaufen. Beide Summen haben sich durch die Umbenennung gar nicht geändert.

Mit der anderen und üblichen Bezeichnung der Binomialkoeffizienten sieht die die Formel so aus:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Man kann sie wie folgt einsehen: Multipliziert man das Produkt

$$(x + y) \cdot (x + y) \cdot \dots \cdot (x + y)$$

von n Faktoren $(x + y)$ aus, so muß man auf alle möglichen Weisen in jedem Faktor entweder x oder y wählen, die so Gewählten multiplizieren und alles aufaddieren. Ein Produkt $x^k y^{n-k}$ kommt dabei zustande, wenn man in k der Faktoren $(x + y)$ jeweils das x gewählt hat. Und dafür gibt es nach (3.5) jeweils $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

Für positive x folgt aus dem Binomischen Lehrsatz sogleich die wichtige

(3.8) Bernoullische Ungleichung. Sei $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$, dann ist

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

Beweis durch Induktion nach n :

$$(A) \quad 1 + x \leq (1 + x)^1.$$

$$(S) \quad \begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n \cdot (1 + x) \geq (1 + nx) \cdot (1 + x) \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x. \end{aligned} \quad \square$$

(3.9) Wohlordnungsprinzip. Jede nicht leere Menge natürlicher Zahlen enthält eine kleinste Zahl.

Beweis: Ist $n \in M \subset \mathbb{N}$, so ist $\min(M) = \min(M \cap \{1, \dots, n\})$, siehe (3.1). \square

Hieraus folgt die etwas stärkere Version des Induktionsprinzips:
Bewiesen sei:

Gilt $B(k)$ für alle $k < n$, so gilt $B(n)$.

Dann folgt: $B(n)$ für alle n .

Beweis: Es gäbe sonst ein kleinstes n , für das $B(n)$ nicht gilt. Aber aus $B(k)$ für $k < n$ folgt $B(n)$. Das wäre ein Widerspruch. \square

Wir werden noch oft Gelegenheit haben, das Prinzip der vollständigen Induktion zu benutzen. Wir beschließen diesen Abschnitt mit einigen Bezeichnungen.

\mathbb{N} = Menge der natürlichen Zahlen,

\mathbb{N}_0 = $\mathbb{N} \cup \{0\}$,

\mathbb{Z} = $\mathbb{N}_0 \cup -\mathbb{N}_0$ = Ring der ganzen Zahlen,

\mathbb{Q} = $\{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$ = Körper der rationalen Zahlen.

§ 4. Das Vollständigkeitsaxiom

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wir nennen eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine **obere Schranke** von M , falls $M \leq x$, und wir nennen x eine **untere Schranke** von M , falls $x \leq M$. Falls M eine obere (untere) Schranke besitzt, heißt M nach oben (unten) **beschränkt**, und falls M beides besitzt, heißt M kurzweg **beschränkt**.

Auch eine beschränkte Menge braucht kein Maximum zu besitzen, z.B. die **Intervalle**

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \mid a \leq x \leq b\}, & \text{abgeschlossen,} \\ [a, b) &= \{x \mid a \leq x < b\}, & \text{halboffen,} \\ (a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\}, & \text{halboffen,} \\ (a, b) &= \{x \mid a < x < b\}, & \text{offen,} \end{aligned}$$

sind alle beschränkt durch a bzw. b , aber das zweite hat kein Maximum, das dritte kein Minimum und das vierte beides nicht. Jedoch besagt das Vollständigkeitsaxiom, daß eine nach oben beschränkte nicht leere Menge eine obere Grenze besitzt, und diese ist so erklärt:

Definition (Grenze): Das **Supremum** (die **obere Grenze**) einer Menge M ist eine kleinste obere Schranke von M , bezeichnet durch $\sup(M)$. Entsprechend heißt eine größte untere Schranke $\inf(M)$ = **Infimum** = **untere Grenze** von M . Mit anderen Worten:

$$\sup(M) = \min\{x \mid M \leq x\}, \quad \inf(M) = \max\{x \mid x \leq M\}.$$

Beides braucht in \mathbb{R} nicht zu existieren; wie fürs Maximum gilt

$$\inf(M) = -\sup(-M),$$

sodaß wir nur das Supremum studieren müssen. Es ist nach Definition durch die Eigenschaften

$$(4.1) \quad \begin{aligned} M &\leq \sup(M), \\ M \leq x &\Rightarrow \sup(M) \leq x, \end{aligned}$$

beschrieben, und dadurch in der Tat eindeutig bestimmt. Existiert $\max(M)$, so ist natürlich $\max(M) = \sup(M)$, aber das Intervall $M = (a, b)$, $a < b$, hat kein Maximum, wohl aber das Supremum $\sup(M) = b$.

Ist M nach oben unbeschränkt, so schreibt man $\sup(M) = \infty$, und ist $M = \emptyset$, so schreibt man $\sup(M) = -\infty$, nämlich jedes

$x \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke. Entsprechend sei $\inf(M) = -\infty$ falls M nicht nach unten beschränkt ist, und $\inf(\emptyset) = \infty$. Mit den Zeichen ∞ , $-\infty$ rechnet man, wo es einen ersichtlichen Sinn hat, formal herum:

$$\begin{aligned} \frac{y}{0} &:= \infty + \infty := \infty \cdot \infty := \infty + x := \infty \cdot y := \infty \quad \text{für } y > 0; \\ x - \infty &:= y \cdot \infty := \frac{y}{0} := -\infty \quad \text{für } y < 0. \end{aligned}$$

Aber solche Zeichen wie

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{\infty}{0}, \infty - \infty \dots$$

sind nicht definiert, und Formeln, in denen sie vorkommen, haben keinen Sinn. Die Menge, die aus \mathbb{R} durch hinzufügen zweier Punkte $\infty, -\infty$ entsteht, heißt auch die

abgeschlossene reelle Gerade $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

In $\bar{\mathbb{R}}$ hat dann jede Menge ein Infimum und ein Supremum, und diese sind jeweils eindeutig bestimmt. Aber natürlich ist $\bar{\mathbb{R}}$ kein Körper mehr, und darum muß man doch meist genau hinschauen, ob $\sup(M)$ in \mathbb{R} existiert. Wir ziehen sogleich eine sehr einleuchtende Folgerung aus dem Vollständigkeitsaxiom.

(4.2) Prinzip von Archimedes. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und $b > 0$, dann gibt es eine natürliche Zahl n , sodaß $n \cdot b > a$.

Beweis: Andernfalls wäre die Menge

$$M = \{nb \mid n \in \mathbb{N}\} \leq a$$

beschränkt und hätte ein Supremum $s = \sup(M) \in \mathbb{R}$. Nach Definition des Supremums, weil $s - b < s$, gäbe es ein Element $n_0 b > s - b$ in M , also $(n_0 + 1)b > s = \sup(M)$; aber $(n_0 + 1)b \in M$, ein Widerspruch — was wir hinfort durch \boxtimes anzeigen. \square

Folgerung. *Jedes echte Intervall enthält eine rationale Zahl.*

Beweis: Sei also $a < b$, und sei zunächst $a > 0$ angenommen. Wir suchen natürliche Zahlen m, n mit $a < m/n < b$, das heißt $na < m < nb$. Nun, wählen wir n so groß, daß $n(b - a) > 1$, und dann $m - 1$ als die größte ganze Zahl, die noch nicht größer als na ist, so ist $na < m \leq na + 1 < nb$, was wir wollten.

Ist $a < 0$, so wähle ein $\ell \in \mathbb{N}$, sodaß $\ell > -a$ und nach dem vorigen eine rationale Zahl r , sodaß $a + \ell < r < b + \ell$, dann folgt $a < r - \ell < b$. \square

Man könnte nun glauben, daß es viel mehr rationale als irrationale Zahlen gebe: Zwischen zwei irrationalen liegt immer eine rationale Zahl. Aber auch zwischen zwei rationalen liegt immer eine irrationale Zahl, das sieht man ganz ähnlich, wenn man erst einmal überhaupt irrationale Zahlen kennt. Tatsächlich gibt es in gewissem Sinne viel mehr irrationale als rationale Zahlen, wie wir später (Kap.VI, §3) genauer ausführen werden.

Daß es überhaupt irrationale Zahlen gibt, war schon lange vor Euklid bekannt:

Bemerkung. *Es gibt keine rationale Zahl $x = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, sodaß*

$$x^2 = 2.$$

Beweis: Kürze, sodaß m und n nicht beide gerade sind, dann wäre

$$\frac{m^2}{n^2} = 2, \quad \text{also} \quad m^2 = 2n^2,$$

also m gerade (sonst wäre m^2 ungerade), also m^2 durch 4 teilbar, also n gerade. \blacktimes \square

Daß tatsächlich jede positive reelle Zahl eine n -te Wurzel hat, werden wir bald sehen, vorläufig sei es stets vorausgesetzt.