

---

## Kapitel V

# Konvergenz und Approximation

*C'étaient les cieux ouverts pour nous  
ou du moins pour moi. Je voyais enfin  
le pourquoi des choses, ce n'était plus  
une recette d'apothicaire tombé du ciel.*

*Stendhal*

Wir zeigen, wie die Differential- und Integralrechnung helfen kann, auch elementare Fragen über die Konvergenz von Folgen und Reihen zu lösen. Wir erklären uneigentliche Integrale als Verallgemeinerung unendlicher Reihen, und wir benutzen Dirac-Folgen, um den Satz von Weierstraß über die Approximation stetiger Funktionen durch Polynome zu zeigen.

### § 1. Der allgemeine Mittelwertsatz

Hierbei handelt es sich um ein besonders brauchbares Werkzeug der Differentialrechnung für Konvergenzuntersuchungen.

#### **(1.1) Allgemeiner Mittelwertsatz der Differentialrechnung.**

Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$ ,  $a < b$ , stetig und auf dem Inneren  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$ , sodaß

$$f'(\xi) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(\xi) \cdot (f(b) - f(a)).$$

Verschwand  $g'$  nirgends auf  $(a, b)$ , so ist  $g(b) \neq g(a)$  und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**Beweis:** Wende den Satz von Rolle auf die Funktion

$$F(x) = (f(x) - f(a)) \cdot (g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a)) \cdot (f(b) - f(a))$$

an. Die zweite Behauptung folgt, weil  $g$  streng monoton ist.  $\square$

Wählt man  $g(x) = x$ , so erhält man den Mittelwertsatz (III, 3.2) zurück. Klassische Anwendungen sind folgende Regeln:

**(1.2) 1. Regel von de l'Hospital.** Seien  $f$  und  $g$  auf dem Intervall  $[a, b]$  stetig und auf dem Inneren  $(a, b)$  differenzierbar, und es sei  $f(a) = g(a) = 0$ , und  $g' \neq 0$  auf  $(a, b)$ . Existiert dann

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{so auch} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

und beide sind gleich.

**Beweis:** Der Mittelwertsatz liefert

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a + \vartheta_x(x - a))}{g'(a + \vartheta_x(x - a))}, \quad 0 < \vartheta_x < 1,$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Beispiel.** Gesucht ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n.$$

Es gelingt allgemeiner,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + tx)^{\frac{1}{x}}$  zu bestimmen. Man logarithmiert und findet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(1 + tx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + tx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{1 + tx} = t,$$

die zweite Gleichung nach (1.2). Also

$$(1.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + tx)^{\frac{1}{x}} = e^t.$$

Dies hat eine ganz anschauliche Bedeutung: Verzinst man ein Vermögen  $v$  an  $n$  aufeinanderfolgenden Zeitpunkten mit dem Zinssatz  $a(t/n)$ , so hat man am Ende das Vermögen  $v(1+at/n)^n$ . Für  $n \rightarrow \infty$  geht dies gegen  $v \cdot e^{at}$ , die Funktion von  $t$  mit konstanter Zuwachsrate  $a$ , die also die kontinuierliche Verzinsung beschreibt.

Das hier angewandte Verfahren, auch einen Grenzwert für  $x \rightarrow \infty$  zu bestimmen, läßt sich allgemein durchführen:

**(1.4) 1. Regel von de l'Hospital** (für  $\lim_{x \rightarrow \infty}$ ). Seien  $f$  und  $g$  auf dem Intervall  $[b, \infty)$  differenzierbar, sei überall  $g' \neq 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

**Beweis:** Man darf  $b > 0$  voraussetzen. Dann erfüllen  $f(t^{-1})$ ,  $g(t^{-1})$  als Funktionen von  $t$  die Voraussetzungen der ersten Regel auf dem Intervall  $[0, b^{-1}]$ , wenn man  $f(0^{-1}) = g(0^{-1}) = 0$  setzt. Also gilt mit  $x = t^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t^{-1})}{g(t^{-1})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d/dt(f(t^{-1}))}{d/dt(g(t^{-1}))} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df/dx(t^{-1}) \cdot dx/dt}{dg/dx(t^{-1}) \cdot dx/dt} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \square \end{aligned}$$

**(1.5) 2. Regel von de l'Hospital.** Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien auf dem Intervall  $[a, b)$  differenzierbar. Sei überall  $g' \neq 0$ , und es sei  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$ . Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert. Die Regel gilt auch für  $b = \infty$ .

**Beweis:** Jedenfalls ist in einer Umgebung von  $b$  stets  $g > 0$  und auch  $g' > 0$ , denn wäre stets  $g' < 0$ , so müßte  $g$  ja monoton fallen und könnte nicht gegen  $\infty$  gehen. Wir dürfen allgemein  $g > 0$ ,  $g' > 0$  annehmen. Sei nun  $\lim_{x \rightarrow b} (f'(x)/g'(x)) = q$ . Dann ist für ein  $\delta > 0$  und  $b - \delta < x < b$  somit

$$q - \varepsilon < f'/g' < q + \varepsilon.$$

Ist insbesondere  $b - \delta < p < x < b$ , so erhalten wir nach dem Mittelwertsatz

$$q - \varepsilon < \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} < q + \varepsilon,$$

also  $(q - \varepsilon)g(x) + c < f(x) < (q + \varepsilon)g(x) + d$  mit Konstanten  $c, d$ , und folglich

$$q - \varepsilon + \frac{c}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < q + \varepsilon + \frac{d}{g(x)}.$$

Weil aber  $g(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow b$ , folgt  $q - 2\varepsilon < f(x)/g(x) < q + 2\varepsilon$ , also  $|f(x)/g(x) - q| < 2\varepsilon$ , wenn  $|x - b|$  genügend klein ist.  $\square$

**Beispiel:** Seien  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  und  $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$  Polynome vom Grad  $n$ , dann ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}.$$

Das ergibt sich durch  $n$ -maliges Anwenden der 2. Regel.

Die zweite Regel ist nützlicher als die erste, die kaum mehr liefert als die Taylorformel. Auch die Taylorformel kann man unmittelbar aus dem allgemeinen Mittelwertsatz gewinnen, man erhält sogar eine etwas schärfere Fassung der

**(1.6) Restglieddarstellung von Lagrange.** Die Funktion  $f$  sei  $(n+1)$ -mal differenzierbar in dem ganzen Intervall  $\{p+tx \mid 0 \leq t \leq 1\}$ .

Dann gilt:

$$f(p+x) = j_p^n f(x) + \frac{f^{[n+1]}(p+\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Die Verschärfung liegt darin, daß  $\vartheta$  nicht 0 oder 1 ist, und daß  $f^{[n+1]}$  nicht stetig sein muß.

**Beweis:** Als  $f$  im allgemeinen Mittelwertsatz wählen wir das Restglied  $r(x) = f(p+x) - j_p^n f(x)$ , und als  $g$  die Funktion  $x^{n+1}$ . Dann steht da

$$\frac{r(x)}{x^{n+1}} = \frac{r'(\vartheta_1 x)}{(\vartheta_1 x)^n} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad 0 < \vartheta_1 < 1.$$

Nach weiterer  $n$ -maliger Anwendung landet man bei

$$\frac{r(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{r^{[n+1]}(\vartheta_1 \cdot \dots \cdot \vartheta_{n+1} x)}{1} = \frac{f^{[n+1]}(p+\vartheta x)}{(n+1)!},$$

mit  $\vartheta = \vartheta_1 \cdot \dots \cdot \vartheta_{n+1}$ . □

## § 2. Uneigentliche Integrale

Haben wir im vorigen Abschnitt gesehen, daß die Differentialrechnung ein starkes Hilfsmittel für Konvergenzuntersuchungen ist, so wollen wir hier sehen, was das Integral in dieser Hinsicht bringt. Wir betrachten eine Funktion

$$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a < b, \quad b \in \bar{\mathbb{R}},$$

sodaß die Einschränkung von  $f$  auf jedes Intervall  $[a, x]$ ,  $a \leq x < b$  integrierbar ist. Dann ist das **uneigentliche Integral**

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

Diese Bildung ist analog zur Bildung der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  aus einer Folge  $(f_k)$ . Den Partialsummen  $F_n = \sum_{k=0}^n f_k$  entsprechen hier die **Partialintegrale**

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt,$$

und wie bei Reihen nennen wir auch diese Stammfunktion  $F$  das **uneigentliche Integral**  $\int_a^b f$  und sagen, dieses **konvergiert**, falls  $F(x)$  für  $x \rightarrow b$  konvergiert. Ist umgekehrt  $F$  gegeben und stetig differenzierbar, so ist

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt,$$

und daß  $F$  für  $x \rightarrow b$  konvergiert, besagt dasselbe, wie daß das uneigentliche Integral von  $F'$  existiert.

Tatsächlich kann man Reihen als spezielle uneigentliche Integrale ansehen. Ist nämlich  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  eine Reihe, und erklären wir eine Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(t) = f_k$  für  $k \leq t < k+1$ , so ist

$$(2.1) \quad \int_0^{\infty} f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} f_k,$$

wenn eines von beiden konvergiert. Ist nämlich  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , so ist  $F(n)$  die  $n$ -te Partialsumme der Reihe, und für  $n \leq x < n+1$  ist  $|F(n) - F(x)| = |\int_n^x f_n| = |f_n|(x-n) \leq |f_n|$ . Konvergiert nun die Reihe gegen  $a$ , so ist schließlich  $|F(n) - a| < \varepsilon/2$  und  $|f_n| < \varepsilon/2$ , also für genügend große  $x$  auch  $|F(x) - a| < \varepsilon$ . Umgekehrt, wenn  $F(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  konvergiert, so insbesondere  $F(n)$  für  $n \rightarrow \infty$ , und zwar gegen dasselbe.

Die Konvergenzsätze für Reihen lassen sich weitgehend auf uneigentliche Integrale übertragen.

**(2.2) Satz über monotone Konvergenz.** Ist  $f \geq 0$ , so ist das uneigentliche Integral  $\int_a^b f(t) dt$  genau dann konvergent, wenn es beschränkt ist.

**(2.3) Majorantenkriterium.** Ist  $0 \leq f \leq g$  und konvergiert das uneigentliche Integral  $\int_a^b g(t) dt$ , so auch  $\int_a^b f(t) dt$ .

**Beweis:** (2.3) folgt aus (2.2), denn  $\int_a^x f \leq \int_a^x g \leq \int_a^b g$ . Für (2.2) setze  $s = \sup\{F(x) \mid x \in [a, b)\}$ . Sei  $s < \infty$ . Weil das Partialintegral  $F(x)$  mit  $x$  monoton wächst und für ein  $x$  größer als  $s - \varepsilon$  ist, so ist es fortan immer zwischen  $s - \varepsilon$  und  $s$ , also es konvergiert gegen  $s$ . Ist  $s = \infty$ , so ergibt sich ganz analog  $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \infty$ .  $\square$

Betrachten wir als Beispiel die Funktionen auf  $\{x \geq 1\}$

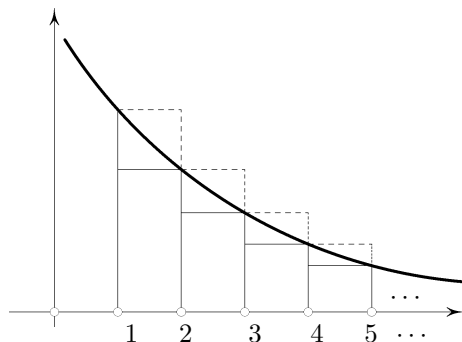
$$f(x) = x^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Es ist  $F(x) = \int_1^x t^{-\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1}(1 - x^{1-\alpha})$  für  $\alpha \neq 1$ . Folglich divergiert  $\int_1^\infty t^{-\alpha} dt$  für  $\alpha < 1$ , und

$$(2.4) \quad \int_1^\infty t^{-\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{für } \alpha > 1.$$

Für  $\alpha = 1$  ist  $F(x) = \int_1^x t^{-1} dt = \log(x)$ , und dies geht gegen  $\infty$  für  $x \rightarrow \infty$ .

Dies sieht viel einfacher aus, als die entsprechenden Aussagen über die Reihen  $\sum_n 1/n^\alpha$ , denn hier wird das Ergebnis ja mit Schulkenntnissen und ohne jeden Trick und Einfall gewonnen. Indessen zeigt sich hier eben die überlegene Kraft des Kalküls der Differential- und Integralrechnung. Man erhält nämlich jetzt aus der Berechnung uneigentlicher Integrale durch Vergleich genauere Auskunft über Reihen. Betrachten wir allgemein eine nie negative, monoton fallende Funktion  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir vergleichen das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty f(t) dt$  mit der Reihe  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ .



Aus der Monotonie ergibt sich

$$(2.5) \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k).$$

Summation von 1 bis  $n$  liefert

$$(2.6) \quad \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

Dies zeigt schon, daß die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  genau dann konvergiert, wenn das uneigentliche Integral  $\int_1^{\infty} f(t) dt$  konvergiert. Aus (2.5) sieht man, daß die Folge

$$n \mapsto \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(t) dt =: a_n$$

nicht negativ ist und monoton wächst, und aus (2.6) ergibt sich die Abschätzung

$$(2.7) \quad a_n \leq f(1) - f(n+1).$$

Daraus folgt, daß  $(a_n)$  konvergiert. Geht übrigens  $f(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , so konvergiert die Folge

$$n \mapsto \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt$$

gegen denselben Grenzwert wie  $(a_n)$ . Wir fassen zusammen.

**(2.8) Satz.** Sei  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  eine nie negative, monoton fallende Funktion. Dann ist die Folge  $(a_n)$  mit

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(t) dt$$

nie negativ, sie wächst monoton, und sie konvergiert, mit

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq f(1).$$

Das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty f(t) dt$  konvergiert genau wenn die Reihe  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$  konvergiert.  $\square$

Dies gibt schon eine treffliche Abschätzung der Reihe  $\sum f(k)$ , wenn man das uneigentliche Integral berechnen kann. Auf die Funktion  $t^{-\alpha}$  zurückzukommen, hier erhalten wir aus (2.6) die Abschätzung mit lauter echten (!) Ungleichungen

$$(2.9) \quad \int_1^\infty t^{-\alpha} dt < \sum_{k=1}^\infty k^{-\alpha} < 1 + \int_1^\infty t^{-\alpha} dt, \quad \text{d.h.} \\ \frac{1}{\alpha - 1} < \sum_{k=1}^\infty k^{-\alpha} < \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad \text{für } \alpha > 1.$$

Für  $\alpha > 1$  schreibt man  $\zeta(\alpha) := \sum_{k=1}^\infty k^{-\alpha}$  und nennt diese Funktion die Riemannsche **Zeta-Funktion**. Sie spielt, freilich erst nach Ausdehnung auf die Ebene der komplexen Zahlen, eine große Rolle in der Zahlentheorie. Unsere Abschätzung zeigt zum Beispiel  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \zeta(\alpha) = 1$ , was man der Reihe selbst nicht ohne weiteres ansieht, und sie zeigt, wie  $\zeta(\alpha)$  für  $\alpha \rightarrow 1$  wächst. Für  $\alpha = 1$  bringt (2.6) die Abschätzung

$$(2.10) \quad \log(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \log(n).$$

Die nach (2.8) konvergente Folge  $(\sum_{k=1}^n k^{-1} - \log(n))$  hat als Grenzwert die

**Eulersche Konstante.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n))$ .

Ihr Wert ist  $0,5772\dots$ . So sehen wir auch gut, wie die harmonische Reihe wächst.

Man kann nach der Analogie zwischen Reihen und uneigentlichen Integralen die Konvergenzkriterien für Reihen, die wir kennengelernt haben, auf uneigentliche Integrale übertragen. Von theoretischer Bedeutung ist insbesondere das Cauchy-Kriterium.

**(2.11) Cauchy-Kriterium.** Sei  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ , und es gebe mindestens eine Folge  $(x_n)$  in  $D$ , die gegen  $b$  konvergiert. Dann existiert  $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$  genau dann, wenn folgendes gilt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , sodaß für alle  $x, z \in D$  gilt: Sind  $x$  und  $z$  in der  $\delta$ -Umgebung von  $b$ , so ist  $|F(x) - F(z)| < \varepsilon$ .

Beachte, daß die Funktion  $F$  nur auf dem angegebenen Definitionsbereich  $D$  betrachtet wird, also überhaupt nur Folgen  $(x_n)$  in  $D$  für die Grenzwertbildung zugelassen sind.

**Beweis:** Angenommen  $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = a$  existiert, so gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, daß  $|F(x) - a| < \varepsilon/2$  und  $|F(z) - a| < \varepsilon/2$ , immer wenn  $x, z$  in der  $\delta$ -Umgebung von  $b$  liegen. Damit ist dann auch  $|F(x) - F(z)| < \varepsilon$ , wie gefordert.

Angenommen, die Bedingung des Satzes ist erfüllt. Sei  $(x_n)$  irgendeine Folge in  $D$ , die gegen  $b$  konvergiert. Wir müssen zeigen, daß dann auch  $(F(x_n))$  konvergiert. Nun, ist  $\varepsilon > 0$  und dazu  $\delta$  nach der Bedingung im Satz gewählt, so ist schließlich  $x_n \in U_\delta(b)$ . Also gelte dies etwa für  $n \geq m$ .

Dann sagt aber die Bedingung im Satz:  $|F(x_m) - F(x_{m+k})| < \varepsilon$ . Mit anderen Worten, die Folge  $(F(x_n))$  ist eine Cauchy-Folge, und

konvergiert. Wir haben noch zu zeigen, daß der Grenzwert nicht von der Wahl der Folge  $(x_n) \rightarrow b$  abhängt. Aber hat man eine andere Folge  $(z_n) \rightarrow b$  in  $D$ , so konvergiert ja auch die Folge  $u_n$  mit  $u_{2n} = x_n$ ,  $u_{2n+1} = z_n$  gegen  $b$ , also  $(F(u_n))$  konvergiert nach dem Gesagten, und zwar gegen dasselbe, wie beide Teilfolgen  $(F(x_n))$  und  $(F(z_n))$ .  $\square$

Wir wollen dies insbesondere auf uneigentliche Integrale

$$F = \int_a^b f(x) dx, \quad f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

anwenden. Das Integral heißt **absolut konvergent**, wenn

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

konvergiert.

**(2.12) Bemerkung.** *Ein absolut konvergentes uneigentliches Integral konvergiert.*

**Beweis:** Dies folgt wie früher aus dem Cauchy-Kriterium und der verallgemeinerten Dreiecksungleichung

$$\left| \int_z^u f(x) dx \right| \leq \int_z^u |f(x)| dx \quad \text{für } z \leq u. \quad \square$$

So liefert der Vergleich von Funktionen mit den schon behandelten Funktionen  $t^{-\alpha}$  das folgende hilfreiche Kriterium: Man sagt, eine Funktion  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  **verschwindet von höherer als erster Ordnung** für  $t \rightarrow \infty$ , falls es ein  $b \geq a$  und ein  $\alpha > 1$ , sowie eine Schranke  $K$  gibt, derart daß

$$|f(t)| \cdot t^\alpha \leq K \quad \text{für } t \geq b.$$

**(2.13) Konvergenzkriterium.** Wenn  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  für  $t \rightarrow \infty$  von höherer als erster Ordnung verschwindet, so konvergiert das Integral

$$\int_a^\infty f(t) dt$$

absolut. Ist hingegen  $f(t) \cdot t \geq K > 0$  für  $t \geq b$ , so divergiert das Integral.

**Beweis:** Im ersten Fall ist  $|f(t)| \leq Kt^{-\alpha}$  für  $t \geq b$ , und  $\int_a^\infty t^{-\alpha} dt$  konvergiert. Im zweiten Fall ist  $f \geq K/t$  für  $t \geq b$ , und  $\int_a^\infty Kt^{-1} dt$  divergiert. Hier haben wir das Vorherige im Fall  $b = \infty$  angewandt.  $\square$

Zum Beispiel ist  $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ , und daher konvergiert  $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ , und zwar, wie wir ja wissen, gegen  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \pi/2$ .

Nicht immer stößt man hier auf schon bekannte Funktionen. Uneigentliche Integrale bilden ein wichtiges Mittel zur Konstruktion von bedeutungsvollen Konstanten und Funktionen in der Analysis. Ein klassisches Beispiel ist die **Gamma-Funktion**

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} \cdot e^{-x} dx \quad \text{für } t > 0.$$

Dieses Integral ist in der Tat absolut konvergent, denn  $x^2(x^{t-1}e^{-x}) = x^{t+1}e^{-x} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ . Bei Null hat man entsprechend die Majorante  $x^{t-1}$ . Man bildet hier also einen beidseitigen Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow 0} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{t-1} e^{-x} dx$ . Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx = \left[ -x^{t-1} e^{-x} \right]_0^\infty + (t-1) \int_0^\infty x^{t-2} e^{-x} dx \\ &= (t-1) \Gamma(t-1), \quad t > 1. \end{aligned}$$

Nun ist  $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$ , also folgt induktiv

$$(2.14) \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Die Funktionalgleichung  $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$  benutzt man, um  $\Gamma(t)$  auch für negative  $t$  zu erklären. Die  $\Gamma$ -Funktion ist allgegenwärtig in der Zahlentheorie, aber als Interpolationsfunktion von  $n!$  auch in der Statistik.

Bei der Integraldarstellung der  $\Gamma$ -Funktion haben wir eben in beiden Grenzen uneigentliche Integrale betrachtet. Zum Gebrauch im nächsten Abschnitt definieren wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} := \int_0^{\infty} - \int_0^{-\infty}.$$

Natürlich hätte man das Integral auch an irgendeiner anderen Stelle statt am Nullpunkt zerlegen können.

Schließlich kann man natürlich uneigentliche Integrale auch nach der Transformationsformel transformieren. Betrachten wir als Beispiel das **Fresnelsche Integral**

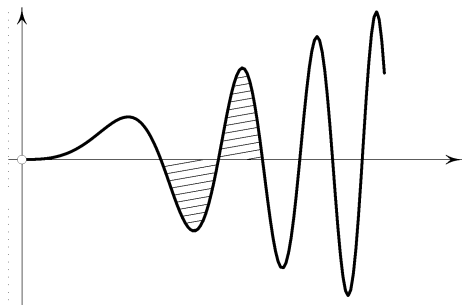
$$\int_0^\infty \sin(t^2) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \sin(t^2) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du,$$

mit Transformation  $u = t^2$ ,  $du = 2t dt = 2\sqrt{u} dt$ . Das letzte Integral konvergiert. Das sieht man leicht mit dem Leibniz-Kriterium, indem man das Integrationsintervall an den Stellen  $k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  zerlegt. Man erhält dann eine alternierende Reihe mit monoton gegen Null gehenden Gliedern. Bemerkenswert an dem Beispiel ist, daß der Integrand  $\sin(t^2)$  nicht gegen Null konvergiert.

Das Integral (mit gleicher Transformation)

$$\int_0^\infty 2t \sin(t^4) dt = \int_0^\infty \sin(u^2) du$$

ist gar konvergent, obwohl der Integrand unbeschränkt ist. Das allein bringt eben noch nicht so viel, das Integral der einzelnen Wellen und Täler geht doch gegen Null, weil sie so schmal werden:



Manchmal gelingt es, ein uneigentliches Integral in ein eigentliches zu transformieren, wie zum Beispiel

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\pi/2} du = \pi/2,$$

$$t = \sin(u), \quad dt = \cos(u) du = \sqrt{1-t^2} du.$$

Näheres über das wirkliche Ausrechnen unbestimmter Integrale lehrt in erhellender Weise die Funktionentheorie.

### § 3. Dirac-Folgen

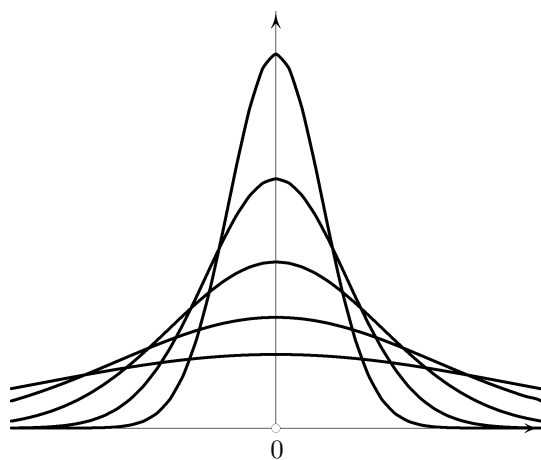
Physiker erzählen von einer Dirac-Funktion  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\delta(t) = 0$  für  $t \neq 0$ ;      (ii)  $\delta(0) = \infty$ ;      (iii)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ .

Und Sie behaupten dann, es gelte für beliebige stetige Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(iv) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(x-t) dt = f(x).$$

Freilich gibt es solche Funktionen nicht, und auf die Theorie der Distributionen, in der man den Funktionsbegriff so erweitert, daß die letzte Gleichung ganz richtig herauskommt, wollen wir uns hier nicht einlassen. Nur so viel: die letzte Gleichung ist das Wesentliche, Gleichung (iii) ist der Spezialfall  $f = 1$ , Gleichung (i) hat wenig zu bedeuten, und (ii) noch weniger als nichts. Uns genügt zu sagen, daß man doch Funktionenfolgen angeben kann, die das Verhalten der Dirac-Funktion approximieren.



**Definition.** Eine **Dirac-Folge** ist eine Folge stetiger Funktionen  $\delta_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

(D1)  $\delta_n \geq 0$ .

(D2)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = 1$ .

(D3) Sind  $\varepsilon, \eta > 0$ , so gilt für fast alle  $n$ :

$$\int_{-\infty}^{-\eta} \delta_n(t) dt + \int_{\eta}^{\infty} \delta_n(t) dt < \varepsilon.$$

Behauptungen über  $\delta$ -Funktionen wollen wir dann als Aussagen über das Grenzverhalten von Dirac-Folgen  $\delta_n$  für  $n \rightarrow \infty$  interpretieren.

Man kann eine Funktion  $\delta_n$  mit den Eigenschaften (D1), (D2) als Wahrscheinlichkeitsmaß deuten, in dem Sinne, daß man die Punkte eines Intervalls  $[a, b]$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\int_a^b \delta_n(t) dt$  trifft. Das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_n(x-t) dt$$

ist dann ein entsprechend gewichtetes Mittel von  $f$ , der Erwartungswert, wenn jeder Punkt  $t$  mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $\delta_n(x-t)$  gewichtet wird. Wird  $n$  groß, so wird es sehr unwahrscheinlich, daß man einen Punkt außerhalb einer gegebenen  $\eta$ -Umgebung von  $x$  trifft, und der Erwartungswert wird sich  $f(x)$  nähern. Die Dirac-Funktion bezeichnet den Grenzfall der Zwangslage, wo der Punkt  $x$  mit Wahrscheinlichkeit 1 getroffen und mit Wahrscheinlichkeit 0 verfehlt wird. Dann ist der Erwartungswert natürlich gleich  $f(x)$ . In der Mechanik kann man den Übergang von  $(\delta_n)$  zu  $\delta$  ähnlich deuten als Übergang von kontinuierlichen bei  $x$  immer stärker konzentrierten Dichten zum Massenpunkt. Und nun vom Deuten zum Beweisen.

**(3.1) Satz über Dirac-Approximation.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und auf jedem kompakten Intervall integrierbar. Sei  $D \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und  $f$  an jedem Punkt aus  $D$  stetig. Setze

$$f_n(x) := (\delta_n * f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_n(x-t) dt,$$

für eine Dirac-Folge  $\delta_n$ . Dann konvergiert  $(f_n)$  auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f$ .

**Beweis:** Transformiert man das Integral mit  $\tau = x - t$  als neuer

Integrationsvariable, so ergibt sich

$$f_n(x) = - \int_{\infty}^{-\infty} f(x - \tau) \delta_n(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) \delta_n(t) dt.$$

Das sagt, daß die sogenannte **Faltung**  $\delta_n * f$  symmetrisch in  $\delta_n$  und  $f$  ist. Andererseits ist

$$f(x) = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_n(t) dt,$$

und damit stellt sich die Differenz dar als

$$(i) \quad f_n(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x - t) - f(x)) \delta_n(t) dt.$$

Dies haben wir unabhängig von  $x$  abzuschätzen. Sei also  $\varepsilon > 0$  gegeben. Weil  $f$  auf  $D$  gleichmäßig stetig ist, gibt es dazu ein  $\eta > 0$ , sodaß für  $|t| < \eta$  und  $x \in D$  gilt

$$(ii) \quad |f(x - t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Andererseits hat man eine Schranke  $M$  mit  $|f| < M$  auf ganz  $\mathbb{R}$ , und nach der Definition der Dirac-Folge gilt für genügend große  $n$

$$(iii) \quad \int_{-\infty}^{-\eta} \delta_n + \int_{\eta}^{\infty} \delta_n < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Wir zerlegen das Integral in (i) entsprechend:

$$|f_n - f| \leq \int_{-\infty}^{-\eta} |f(x - t) - f(x)| \delta_n(t) dt + \int_{-\eta}^{\eta} (\dots) + \int_{\eta}^{\infty} (\dots).$$

Nun ist jedenfalls  $|f(x - t) - f(x)| \leq 2M$ , also mit (iii)

$$\int_{-\infty}^{-\eta} (\dots) + \int_{\eta}^{\infty} (\dots) \leq 2M \left( \int_{-\infty}^{-\eta} \delta_n + \int_{\eta}^{\infty} \delta_n \right) < \varepsilon.$$

Für das verbliebene mittlere Integral ergibt sich nach (ii)

$$\int_{-\eta}^{\eta} |f(x-t) - f(x)| \delta_n(t) dt \leq \int_{-\eta}^{\eta} \varepsilon \delta_n(t) dt \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n = \varepsilon.$$

Also zusammen  $|f_n - f| < 2\varepsilon$ .  $\square$

In diesem Beweis haben wir den Satz über gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Intervallen in etwas allgemeinerer Form benutzt, als wir ihn früher formuliert haben. Wir haben  $\eta$  so gewählt, daß für  $x \in D$  und  $|t| < \eta$  gilt  $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ . Es ist nicht  $x-t \in D$  verlangt. Schaut man in den alten Beweis (II, 3.10), so sieht man, daß man das auch nicht verlangen muß (die Folge  $(p_n)$  braucht nicht in  $D$  zu laufen, wir kommen darauf in (VI, 7.12) zurück).

Die approximierenden Funktionen erben viele gute Eigenschaften von den  $\delta_n$ , denn das Integral  $\delta_n * f$  hängt ja nur durch  $\delta_n$  von  $x$  ab. Sind die Funktionen der Dirac-Folge glatt, so bügeln und glätten sie  $f_n$ . Das können wir erst richtig würdigen, wenn wir Funktionen mehrerer Variablen betrachten. Aber eine schöne Anwendung geben wir gleich.

**(3.2) Approximationssatz von Weierstraß.** *Eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist gleichmäßiger Limes von Polynomen.*

**Beweis:** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß man eine stetige Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(0) = f(1) = 0$$

approximieren soll. Ersetze nämlich erst  $f$  durch  $f_1 = f \circ \varphi$  mit  $\varphi(t) = a + t(b-a)$ , und dann  $f_1$  durch

$$f_2 = f_1 - ((1-t)f(a) + tf(b)).$$

Auch mag  $f$  überall definiert sein, mit  $f(t) = 0$  für  $t \notin [0, 1]$ . Jetzt konstruieren wir eine Dirac-Folge von Funktionen  $\delta_n$ , die auf dem Intervall  $[-1, 1]$  Polynome sind. Wir setzen nämlich

$$\delta_n(t) = c_n^{-1}(1-t^2)^n \quad \text{für } -1 \leq t \leq 1, \text{ und } \delta_n(t) = 0 \text{ sonst.}$$

Offenbar ist  $\delta_n$  stetig,  $\delta_n \geq 0$ , und wählen wir

$$c_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt,$$

so ist  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = \int_{-1}^1 \delta_n(t) dt = 1$ . Bleibt die Eigenschaft (D3) der Dirac-Folgen zu prüfen. Wir schätzen ab:

$$c_n/2 = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^1 (1+t)^n (1-t)^n dt \geq \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Also  $c_n^{-1} \leq (n+1)/2$ . Demnach gilt für  $0 < \eta < 1$ :

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^1 \delta_n &= \int_{\eta}^1 c_n^{-1}(1-t^2)^n dt \leq \frac{n+1}{2} \int_{\eta}^1 (1-\eta^2)^n dt \\ &= \frac{n+1}{2} (1-\eta^2)^n (1-\eta), \end{aligned}$$

und letzteres geht gegen 0 für  $n \rightarrow \infty$ . Man braucht die Bedingung (D3) nur für kleine  $\eta$  zu prüfen, weil die abzuschätzenden Integrale beim Verkleinern von  $\eta$  wachsen.

Die angegebenen  $\delta_n$  bilden also eine Dirac-Folge, und nach (3.1) strebt die Folge der  $f_n = \delta_n * f$  auf dem Intervall  $[0, 1]$  gleichmäßig gegen  $f$ . Nun schauen wir uns  $f_n$  an. Für  $-1 \leq t \leq 1$  ist  $\delta_n(t)$  ein Polynom, also haben wir jedenfalls eine Darstellung

$$\delta_n(x-t) = g_0(t) + g_1(t)x + \cdots + g_{2n}(t)x^{2n},$$

falls  $x$  und  $t$  beide zwischen 0 und 1 liegen. Damit ist aber für alle  $x \in [0, 1]$

$$f_n(x) = \int_0^1 f(t) \delta_n(x-t) dt = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n}x^{2n}$$

ein Polynom mit Koeffizienten  $a_j = \int_0^1 f(t) g_j(t) dt$ .  $\square$

Im allgemeinen werden die Ableitungen der approximierenden Folge  $(f_n)$  nicht konvergieren, schon gar nicht gleichmäßig, sonst müßte ja  $f$  differenzierbar sein, was nicht vorausgesetzt ist. Doch hat die Dirac-Approximation die folgende schöne Eigenschaft: Wenn  $f$  stetig differenzierbar und die Ableitung beschränkt ist, so gilt dasselbe von den approximierenden Funktionen  $f_n = \delta_n * f$ , und  $(f'_n)$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f'$ , und ebenso für alle höheren Ableitungen. Man sieht das indem man die Ableitung  $d/dx$  von  $f_n$  unter das Integral zieht:

$$\frac{d}{dx} f_n = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \delta_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} f(x-t) \delta_n(t) dt = \delta_n * f'.$$

Also  $(f_n)' = (f')_n$ . Freilich darf man eine Ableitung nicht ohne weiteres unter ein Integral ziehen. Darüber werden wir später erst Genaueres sagen (vergl. Bd. 2, I, 5.1 und III, 4.7).

Man kann auch **Dirac-Familien** von Funktionen  $\delta_s : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  betrachten, die durch  $s \in \mathbb{R}_+$  statt  $n \in \mathbb{N}$  parametrisiert sind. In (D 3) muß es dann "für genügend große  $s$ " statt "für fast alle  $n$ " heißen. Der Satz (3.1) gilt entsprechend, was sich schon daraus leicht ergibt, daß ja aus so einer Familie stets eine Dirac-Folge entsteht, wenn man für  $s$  eine gegen  $\infty$  gehende Folge reeller Zahlen einsetzt.

Viele Beispiele für Dirac-Familien erhält man wie folgt: Es sei  $\delta_1 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  irgendeine integrable Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t) dt = 1.$$

Dann setze

$$(3.3) \quad \delta_s(t) := s \cdot \delta_1(st), \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

Dies definiert eine Dirac-Familie, denn die Transformation  $s \cdot t = \tau$ ,  $s dt = d\tau$  liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_s(t) dt = 1,$$

und weil das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t) dt$  nach Voraussetzung existiert, muß auch zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  und  $\eta > 0$  für genügend große  $s$  schließlich

$$\int_{\eta}^{\infty} \delta_s(t) dt = \int_{\eta}^{\infty} \delta_1(st) \cdot s dt = \int_{s\eta}^{\infty} \delta_1(\tau) d\tau < \varepsilon$$

sein, und ebenso für negative  $t$ .

In der Wahrscheinlichkeitstheorie, auf die wir ja zur Motivation schon hingewiesen haben, erhält man so die oben abgebildeten **Gaußschen Glockenkurven**, mit

$$\delta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2).$$

Das uneigentliche Integral dieser Funktion werden wir später durch Übergang ins Zweidimensionale berechnen (Bd.2, IV, 4.8). Die hieraus nach dem angegebenen Verfahren hervorgehende Dirac-Familie von Gaußschen Glockenfunktionen parametrisiert man in der Form

$$(3.4) \quad G_{\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma \in \mathbb{R}_+.$$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie heißt  $\sigma^2$  die **Varianz** der der zugehörigen Gaußverteilung. Für unsere Parametrisierung wäre

$$s = (\sqrt{2} \sigma)^{-1},$$

je kleiner die Varianz, um so besser gleicht die Gaußverteilung der (als Funktion nicht existenten) Dirac-Funktion.

Besonders einfach wird die Situation, wenn man von einer Funktion  $\delta_1$  ausgeht, die außerhalb eines kompakten Intervalls verschwindet, denn dann ist das uneigentliche Integral in Wahrheit eigentlich.