
Kapitel VI

Metrische und topologische Räume

Es ist eine wahre Freude, den Eifer der alten Geometer anzusehen, mit dem sie diesen Eigenschaften nachforschten, ohne sich durch die Frage eingeschränkter Köpfe irre machen zu lassen, wozu denn diese Kenntnis nützen sollte.

Kant

Wir haben konvergente Folgen oder Umgebungen nicht nur von reellen Zahlen, sondern zum Beispiel auch von Funktionen betrachtet. Auch haben wir festgestellt, daß das Integral als stetige Abbildung eines Raumes von Funktionen nach \mathbb{R} angesehen werden kann. In diesem Kapitel sollen nun die Begriffe der Konvergenz, der Umgebung, und was damit zusammenhängt, grundsätzlich und in großer Allgemeinheit eingeführt und erörtert werden. Wir beginnen jedoch mit einem Abschnitt über euklidische Räume, der eigentlich in die Lineare Algebra gehört.

§ 1. Euklidische Vektorräume

Die wichtigsten Beispiele euklidischer Räume, die wir im folgenden im Auge haben, sind die Räume

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R}\},$$

$$F_a^b = \text{Raum der integrierbaren Funktionen } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \dots??$$

$$C^0[a, b] = \text{Raum der stetigen Funktionen } [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Jedenfalls betrachten wir einen reellen Vektorraum V , d.h. einen Vektorraum über dem Körper \mathbb{R} . Ein **Skalarprodukt** auf V ist eine bilineare, symmetrische, positiv (semi-)definite Abbildung

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}.$$

Das heißt also, wir verlangen folgende Eigenschaften:

Bilinearität: $\langle \lambda v + \mu w, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle + \mu \langle w, u \rangle$
für $v, w, u \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Symmetrie: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.

Positive Semidefinitheit: $\langle v, v \rangle \geq 0$.

Gilt hier $\langle v, v \rangle > 0$ für alle $v \neq 0$, so heißt das Skalarprodukt **positiv definit** oder **euklidisch**, und ein **Euklidischer Raum** ist ein reeller Vektorraum mit einem euklidischen Skalarprodukt. Wir bezeichnen ihn im allgemeinen mit dem gleichen Buchstaben V wie den zugrundeliegenden Vektorraum, ohne das Skalarprodukt extra zu notieren. Vorerst nun sei ein Vektorraum V mit positiv semidefinitem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ betrachtet.

Wegen der Symmetrie ist das Skalarprodukt natürlich auch in der zweiten Variablen linear, und aus der Linearität folgt:

$$\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0.$$

Folgende Beispiele werden für uns wichtig sein:

$$(1.1) \quad V = \mathbb{R}^n, \quad \text{Skalarprodukt} \quad \langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n, \\ \text{für } v = (v_1, \dots, v_n), \quad w = (w_1, \dots, w_n).$$

Wenn man den Matrizenkalkül benutzt, sollte man die Vektoren als Spalten schreiben — das werden wir in dem Fall auch tun — aber im allgemeinen lassen wir es so, weil die chinesische Notation platzraubend und lästig ist. Das nächste Beispiel ist wie angekündigt

$$(1.2) \quad V = F_a^b, \quad \text{also } v, w \in V \text{ sind integrable Funktionen auf einem} \\ \text{Intervall } [a, b], \quad a < b, \text{ und}$$

$$\langle v, w \rangle_2 := \int_a^b v(t) w(t) dt.$$

Man kann (1.1) als Spezialfall für Treppenfunktionen zu einer gewissen Zerlegung in n Teilintervalle ansehen, oder entsprechend (1.2) als Verallgemeinerung von (1.1). Ein n -Tupel ist eine Abbildung $\{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$, $j \mapsto v_j$. Statt dessen betrachten wir Abbildungen $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto v(t)$, und statt zu summieren integrieren wir.

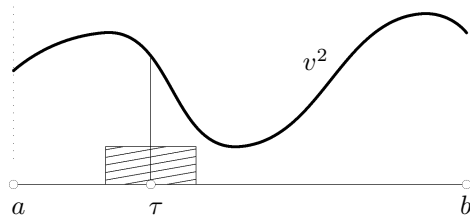
Das Skalarprodukt (1.1) des \mathbb{R}^n , das sogenannte **kanonische**, ist euklidisch, denn ist $v = (v_1, \dots, v_n) \neq 0$, so ist

$$\langle v, v \rangle = v_1^2 + \dots + v_n^2 > 0.$$

Im Beispiel (1.2) ist analog

$$\langle v, v \rangle_2 = \int_a^b v^2(t) dt \geq 0,$$

aber wenn hier $\langle v, v \rangle_2 = 0$ gilt, braucht v noch nicht zu verschwinden, wie man an einer Treppenfunktion sieht, die nur an den Zerlegungspunkten ungleich Null ist. Ist v hingegen stetig, so schließt man leicht $\langle v, v \rangle_2 = 0 \implies v = 0$.



Ist nämlich $v^2(\tau) =: c > 0$ für ein $\tau \in [a, b]$, so gibt es eine δ -Umgebung von τ in $[a, b]$, wo $v^2(t) > c/2$ ist, und die Treppenfunktion, die in dieser δ -Umgebung den Wert $c/2$ und sonst den Wert 0

hat, hat ein positives Integral und ist kleinergleich v^2 , also ist auch $\int_a^b v^2 > 0$. Nehmen wir also

$$(1.3) \quad V = C^0[a, b], \quad \langle v, w \rangle_2 = \int_a^b v(t) w(t) dt,$$

so haben wir wieder einen euklidischen Raum.

Das Beispiel des \mathbb{R}^n und der Lehrsatz des Pythagoras zeigt, daß durch ein Skalarprodukt auf natürliche Weise eine **Norm** von $v \in V$, das ist ein Betrag oder eine Länge, gegeben ist, nämlich durch

$$|v| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Im \mathbb{R}^3 ist dies ja nach Ausweis der Elementargeometrie, was man sich immer unter der Länge vorgestellt hat. Im Fall eines nur positiv semidefiniten Raumes spricht man auch von einer **Seminorm**.

(1.4) Eigenschaften der Norm.

(i) Es ist $|v| \geq 0$, und wenn der Raum euklidisch ist:

$$|v| = 0 \iff v = 0.$$

(ii) **Positive Homogenität:** $|\lambda \cdot v| = |\lambda| \cdot |v|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$.

(iii) **Dreiecksungleichung:** $|v + w| \leq |v| + |w|$.

$$\text{Also } \left| |v| - |w| \right| \leq |v - w|.$$

Diese Normeigenschaften sind uns in (II, 4.2) schon begegnet. Für eine Seminorm, die aus einem Skalarprodukt entsteht, hat man zudem die Abschätzung des Skalarprodukts:

(1.5) **Schwarzsche Ungleichung:** $|\langle v, w \rangle| \leq |v| \cdot |w|$.

Beweis: (1.4) (i) ist klar. (ii): $|\lambda v| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot |v|$. Zum Beweis von (1.5) sei zunächst $|w| = 0$ (oder $|v| = 0$) angenommen — wir sind im semidefiniten Fall und können nicht $w = 0$

schließen, aber:

$$0 \leq \langle v - tw, v - tw \rangle = |v|^2 + t^2|w|^2 - 2t\langle v, w \rangle = |v|^2 - 2t\langle v, w \rangle$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, und das heißt offenbar $\langle v, w \rangle = 0$ und gibt die Behauptung in diesem Fall. Ist $|v| = |w| = 1$ so folgt aus derselben Rechnung mit $t = \pm 1$ wieder $|\langle v, w \rangle| \leq 1$. Allgemein nun wenn $|v| \neq 0 \neq |w|$ schreiben wir $v = |v| \cdot v_1$, $w = |w| \cdot w_1$, mit $|v_1| = |w_1| = 1$, und erhalten aus dem vorigen

$$|\langle v, w \rangle| = |v| \cdot |w| \cdot |\langle v_1, w_1 \rangle| \leq |v| \cdot |w|.$$

$$\begin{aligned} \text{Dreiecksungleichung: } |v + w|^2 &= |v|^2 + |w|^2 + 2\langle v, w \rangle \\ &\leq |v|^2 + |w|^2 + 2|v||w| = (|v| + |w|)^2, \end{aligned}$$

nun ziehe die Wurzel. Wie gehabt folgt daraus $|v - w| \geq |v| - |w|$ und $|w - v| \geq |w| - |v|$, also $|v - w| \geq ||v| - |w||$. \square

Im Fall des Raumes der integrierbaren Funktionen (1.2) heißt die hier erklärte Seminorm die L^2 -**Norm** oder auch **Integralnorm**, und wir bezeichnen sie durch

$$|v|_2 = \left(\int_a^b v(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Der Unterschied zwischen positiv semidefiniten und euklidischen Skalarprodukten ist nicht so wesentlich: Sei $U \subset V$ der Unterraum

$$U = \{u \in V \mid \langle u, u \rangle = 0\},$$

also der Raum der Vektoren der Norm 0. Dies ist ein Unterraum, denn ist $u \in U$ und $v \in V$, so ist $\langle u, v \rangle = 0$ nach der Schwarzschen Ungleichung, also

$$U = \{u \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V\},$$

was offenbar ein Unterraum ist. Man bildet nun den Quotientenraum V/U , also man macht Vektoren der Norm 0 zu Null. Das Skalarprodukt von V induziert eines auf V/U durch

$$\langle v + U, w + U \rangle := \langle v, w \rangle,$$

was wegen $\langle v, u \rangle = \langle u, w \rangle = \langle u, u \rangle = 0$ für $u \in U$ wohldefiniert ist. Dies Skalarprodukt auf V/U ist dann offenbar euklidisch. Die Elemente von U werden bei diesem Verfahren als unbeachtlich angesehen. So betrachten wir integrable Funktionen fortan immer bis auf Nullfunktionen, das heißt modulo Funktionen der L^2 -Norm Null.

Betrachten wir das Beispiel des Raumes $V = F_a^b$ der auf $[a, b]$ integrablen Funktionen etwas näher. Wählt man $w = 1$ als konstante Funktion, so sagt die Schwarzsche Ungleichung

$$\langle 1, v \rangle_2^2 = \left(\int_a^b v(t) dt \right)^2 \leq |1|_2^2 \cdot |v|_2^2 = (b-a) \int_a^b v^2(t) dt.$$

Wenden wir dies auf $|v|$ statt v an und ziehen die Wurzel, so erhalten wir:

$$(1.6) \quad |v|_1 := \int_a^b |v(t)| dt \leq \sqrt{b-a} |v|_2.$$

Das Integral $|v|_1$ heißt die L^1 -Norm von v . Wenden wir diese Ungleichung auf $f - g$ für v an, so ergibt sich

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt \right| \leq |f - g|_1 \leq \sqrt{b-a} |f - g|_2.$$

Dies sagt, daß das Integral ein Lipschitz-stetiger Operator mit Konstante $\sqrt{b-a}$ auf F_a^b ist, wenn man den Abstand der Funktionen durch die L^2 -Norm mißt. Ist also (φ_n) eine Folge von auf $[a, b]$ integrablen Funktionen, die für die L^2 -Norm gegen f konvergiert, das heißt so, daß $(|\varphi_n - f|_2) \rightarrow 0$, so folgt $(\int_a^b \varphi_n) \rightarrow \int_a^b f$. Es braucht in diesem Falle nicht (φ_n) gegen f zu konvergieren. Beispiel: $f = 0$, $\varphi_n(t) = 1$ für $0 \leq t \leq 1/n$, und $\varphi_n(t) = 0$ sonst.

Ist $\|v\|$ das Supremum der Funktion $|v|$ auf $[a, b]$, so ist $\int_a^b v^2(t) dt \leq (b-a) \cdot \|v\|^2$, also

$$(1.7) \quad |v|_2 \leq \sqrt{b-a} \|v\|.$$

Alle diese Bildungen $|v|_1$, $|v|_2$, $\|v\|$ haben die Eigenschaften (II, 4.2) einer Norm, und diese Normen führen zu verschiedenen Konvergenzbegriffen. Gleichmäßig konvergente Folgen sind für die L^2 -Norm konvergent nach (1.7), und für die L^2 -Norm konvergente Folgen sind für die L^1 -Form konvergent nach (1.6). Alle diese Normen haben ihre Entsprechung im \mathbb{R}^n , also ist $v = (v_1, \dots, v_n)$, so hat man den euklidischen Betrag $|v|_2$, die Norm $|v|_1 = \sum_k |v_k|$ und die Maximumnorm $\|v\| = \max\{|v_k| \mid k = 1, \dots, n\}$, aber hier führen alle Normen zum gleichen Konvergenzbegriff.

Ein reeller oder komplexer Vektorraum mit einer Norm mit den Eigenschaften (II, 4.2), die wir in (1.4) für einen euklidischen Raum festgestellt haben, heißt ein **normierter Raum**.

Für spätere Verwendung stellen wir noch fest:

(1.8) Bemerkung. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integabel und $\varepsilon > 0$, so gibt es eine Treppenfunktion φ auf $[a, b]$ mit $|f - \varphi|_2 < \varepsilon$.

Beweis: Wähle eine Treppenfunktion $\varphi \leq f$ mit $\|\varphi\| \leq \|f\|$ und $\int_a^b (f - \varphi) \leq \frac{\varepsilon^2}{2\|f\|}$. So ein φ findet man nach Definition (Riemann-) integabler Funktionen. Dann ist

$$\int_a^b (f - \varphi)^2 \leq \int_a^b (\|f - \varphi\| \cdot (f - \varphi)) \leq 2\|f\| \int_a^b (f - \varphi) \leq \varepsilon^2. \quad \square$$

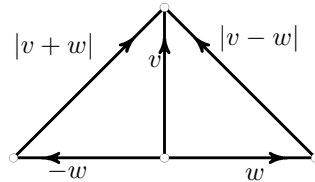
Also, wie man sagt, die Treppenfunktionen liegen **dicht** im Raum der integablen Funktionen mit der L^2 -Norm. Wir kommen auf den Begriff zurück.

§ 2. Orthogonalbasen und Fourierentwicklung

Wir kehren zurück zu euklidischen Räumen. Zu dem Skalarprodukt gehören als angepaßte Basen die Orthonormalbasen, die man

auch für die L^2 -Metrik hat. Die Anschauung legt nahe, daß man zwei Vektoren v, w genau dann **orthogonal** nennt, wenn

$$|v - w| = |v + w|.$$



Das heißt also, genau wenn $|v - w|^2 = |v + w|^2$, also wenn

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

Zum Beispiel sind die **Standard-Einheitsvektoren** im \mathbb{R}^n

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$$

paarweise orthogonal für das von uns betrachtete kanonische Skalarprodukt. Aber wohlgermerkt, es hängt vom Skalarprodukt ab, ob Vektoren orthogonal sind. Sind die Vektoren v_1, \dots, v_n ungleich Null und paarweise orthogonal, so sind sie linear unabhängig, denn wäre

$$0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j, \quad \text{so} \quad 0 = \langle v_k, 0 \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_k |v_k|^2,$$

also $\lambda_k = 0$, weil $|v_k| \neq 0$, wir sind im euklidischen (!) Raum. Vektoren der Norm 1 nennt man auch **Einheitsvektoren**. Hat der euklidische Raum V die Dimension n , und ist v_1, \dots, v_n ein System paarweise orthogonaler Einheitsvektoren, auch **Orthonormalbasis** genannt, so ist dieses eine Basis. Schreibt man zwei Vektoren x, y als Linearkombinationen dieser Basis:

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k v_k, \quad y = \sum_{\ell=1}^n \eta_\ell v_\ell, \quad \text{so ist} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k.$$

Bei Wahl eines Orthonormalsystems als Basis schreiben sich also wie immer Vektoren als n -Tupel, und das Skalarprodukt berechnet sich

als das kanonische dieser n -Tupel, der Raum V ist als euklidischer Raum isomorph zu \mathbb{R}^n . Die Koeffizienten der Linearkombinationen für x und y lassen sich auch mit dem Skalarprodukt berechnen, nämlich:

$$\xi_k = \langle x, v_k \rangle, \quad \text{also} \quad x = \sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle \cdot v_k.$$

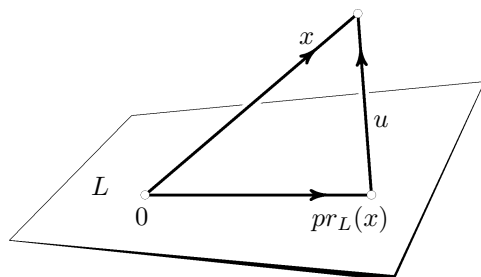
Ist vielleicht $\dim V > n$ aber jedenfalls v_1, \dots, v_n ein Orthonormalsystem, und x ein beliebiger Vektor aus V , so schreibe:

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k v_k + u, \quad \xi_k = \langle x, v_k \rangle.$$

Dann ist $\langle u, v_k \rangle = \langle x, v_k \rangle - \xi_k \langle v_k, v_k \rangle = 0$, also u ist orthogonal zu allen v_k . Man nennt

$$pr_L(x) := \sum_{k=1}^n \xi_k v_k$$

die **Orthogonalprojektion** von x auf den von v_1, \dots, v_n aufgespannten Unterraum L . Von allen Vektoren aus L liegt $pr_L(x)$ am nächsten an x , denn der Abstand ist $|u|$; und der Abstand von x zu $pr_L(x) + v$ für $v \in L$ wäre $\sqrt{|u|^2 + |v|^2}$.



Es ist damit $|x|^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2 + |u|^2 \geq \sum_{k=1}^n \xi_k^2$, also:

(2.1) Besselsche Ungleichung. Ist v_1, \dots, v_n ein Orthonormalsystem im euklidischen Raum V , so ist für jedes $x \in V$:

$$|x|^2 \geq \sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle^2. \quad \square$$

Ein **vollständiges Orthonormalsystem** in einem unendlichdimensionalen euklidischen Raum V ist eine Folge $(v_k \mid k \in \mathbb{N})$ von Vektoren aus V mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist v_1, \dots, v_n ein Orthonormalsystem.
- (ii) Ist $x \in V$ und $u_n = x - \sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle \cdot v_k$, so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0.$$

Mit anderen Worten: Man hat eine für die gegebene Norm konvergente Reihenentwicklung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, v_k \rangle \cdot v_k.$$

Ist $(v_k \mid k \in \mathbb{N})$ ein vollständiges Orthonormalsystem, so kann man in der Gleichung

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle^2 + |u_n|^2$$

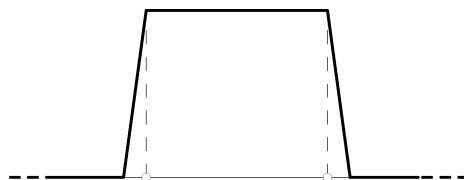
zum Limes übergehen, und erhält die

(2.2) Parsevalsche Gleichung. Ist $(v_k \mid k \in \mathbb{N})$ ein vollständiges Orthonormalsystem des euklidischen Raumes V , so gilt für jedes $x \in V$:

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, v_k \rangle^2. \quad \square$$

Um nun von einem gegebenen Orthonormalsystem $(v_n \mid n \in \mathbb{N})$ im Raum der integrierbaren Funktionen auf einem kompakten Intervall mit der L^2 -Metrik zu zeigen, daß es vollständig ist, muß man

nur für stetige Funktionen oder auch für Treppenfunktionen zeigen, daß sie sich durch Linearkombinationen $\sum_k \xi_k v_k$ beliebig gut L^2 -approximieren lassen. Stetige Funktionen nämlich approximieren Treppenfunktionen für die L^2 -Metrik, wie figura docet,



und Treppenfunktionen approximieren, wie wir wissen, beliebige integrierbare Funktionen beliebig gut für die L^2 -Norm. Um nun eine stetige Funktion für die L^2 -Norm durch Funktionen $\sum_k \xi_k v_k$ zu approximieren, genügt es, sie gleichmäßig zu approximieren, denn

$$\|f - g\| < \varepsilon \implies |f - g|_2 < \varepsilon \cdot \sqrt{b - a}.$$

Zwei wichtige Beispiele von vollständigen Orthonormalsystemen wollen wir kennenlernen. Zunächst die

(2.3) Legendrepolynome. Im Raum V der integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$ betrachte die Polynome:

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = x, \quad \dots, \quad \varphi_n = x^n.$$

Sie bilden eine Basis des Vektorraumes aller Polynome vom Grad $\leq n$. Wir produzieren aus dieser Basis induktiv eine Orthonormalbasis v_0, \dots, v_n durch

(2.4) Schmidt-Orthonormalisierung.

$$v_0 := \varphi_0 / |\varphi_0|_2, \quad \alpha \cdot v_{k+1} := \varphi_{k+1} - \sum_{j=0}^k \langle \varphi_{k+1}, v_j \rangle_2 \cdot v_j,$$

wobei α so bestimmt wird, daß $|v_{k+1}| = 1$, also α ist die Norm der rechten Seite der letzten Gleichung. \square

Das so konstruierte Orthonormalsystem von Polynomen ist bis auf konstante Faktoren das System der Legendrepolynome. Es ist vollständig nach dem Approximationssatz von Weierstraß, der von v_0, \dots, v_n erzeugte Vektorraum ist ja der Raum aller Polynome vom Grad höchstens n .

Will man eine beliebige Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich der L^2 -Norm durch ein Polynom vom Grad höchstens n approximieren, so gibt die beste Approximation das Polynom

$$\sum_{k=0}^n \langle f, v_k \rangle_2 \cdot v_k.$$

Die Normierung der Legendrepolynome $P_n = c_n \cdot v_n$ ist traditionell so bestimmt, daß sie an der Stelle 1 den Wert 1 haben. Es ergibt sich damit

$$v_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}} \cdot P_n$$

für das n -te **Legendrepolynom** P_n .

Das zweite klassische Beispiel, das wir erwähnen wollen, ist die:

(2.5) Fourier-Entwicklung. Im Raum $F_{-\pi}^{\pi}$ der auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ integrierbaren Funktionen bilden die geeignet normierten trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), & n \in \mathbb{N}, \\ v_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), & n \in -\mathbb{N}, \\ v_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

ein Orthonormalsystem; die Berechnung

$$\int_{-\pi}^{\pi} v_n(t) v_m(t) dt = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m, \\ 0 & \text{für } n \neq m, \end{cases}$$

gelingt leicht, wenn man bedenkt, daß die komplexwertige Funktion e^{ikt} für $k \neq 0$ die Stammfunktion $\frac{1}{ik} e^{ikt}$ hat. Eigentlich ist dies nach

unseren Begriffen ein Paar von Funktionen, Real- und Imaginärteil, und entsprechend ein Paar von Stammfunktionen.

Weil die Funktionen v_n alle 2π -periodisch sind, faßt man auch $f \in F_{-\pi}^{\pi}$ als 2π -periodische Funktion auf, indem man

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

setzt. Dann hat f die L^2 -konvergente **Fourierentwicklung**

$$(2.6) \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t) dt.$$

Sie beschreibt eine durch f dargestellte periodische Schwingung als Superposition harmonischer Schwingungen. Es bleibt uns zu zeigen, daß das System der angegebenen Funktionen v_n , $n \in \mathbb{Z}$ vollständig ist, und dazu genügt es, folgendes zu zeigen:

(2.7) Satz (trigonometrische Approximation). *Jede stetige 2π -periodische Funktion ist ein gleichmäßiger Limes von **trigonometrischen Polynomen**, das sind Funktionen der Gestalt*

$$\sum_{k=0}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt).$$

Beweis: Eine 2π -periodische Funktion f kann man als Funktion

$$S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad e^{it} \mapsto f(t)$$

auf dem Kreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ auffassen. Dann dürfen wir annehmen, daß f auf ganz \mathbb{C} stetig ist, indem wir $f(z) = |z| \cdot f(z/|z|)$ für $z \neq 0$, und $f(0) = 0$ setzen. Jetzt betrachten wir das Quadrat $Q = \{z \mid \|z\| \leq 1\}$ in \mathbb{C} und approximieren f auf Q durch ein

Polynom in den beiden Variablen $x = \operatorname{Re}(z)$ und $y = \operatorname{Im}(z)$, also durch

$$p(x, y) = \sum_{k+\ell \leq n} a_{k\ell} x^k y^\ell, \quad \|p - f\|_Q < \varepsilon.$$

Daß das möglich ist, sagt der Approximationssatz von Weierstraß in zwei Variablen, den wir hier zitieren wollen. Man kann ihn aus dem in einer Variablen gewinnen oder direkt ebenso zeigen. Sind wir so weit, so setzen wir $x = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, $y = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ für $(x, y) \in S^1$ ein und erhalten eine Darstellung

$$p(x, y) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Dann ersetzt man wieder nach Eulers Formel die e -Funktion durch Sinus und Kosinus und findet das gesuchte trigonometrische Polynom. Im Ergebnis ist alles wieder reell, denn $p(x, y)$ ist ja reell, alles Imaginäre kann man weglassen. \square

Das war nun nicht etwa eine Darstellung der Theorie der Legendrepolynome und der Fourierentwicklung, sondern nur eine Einladung, sich diesen Gegenständen zuzuwenden. Vieles wäre zu sagen davon.

§ 3. Mengen

Eine Menge X heißt **endlich**, wenn sie leer ist, oder eine surjektive Abbildung $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X$ zuläßt. Sie heißt **abzählbar**, wenn es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow X$ gibt, also wenn man X in einer Folge durchlaufen kann:

$$X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Nicht leere endliche Mengen sind abzählbar, zum Beispiel durch eine schließlich konstante Folge.

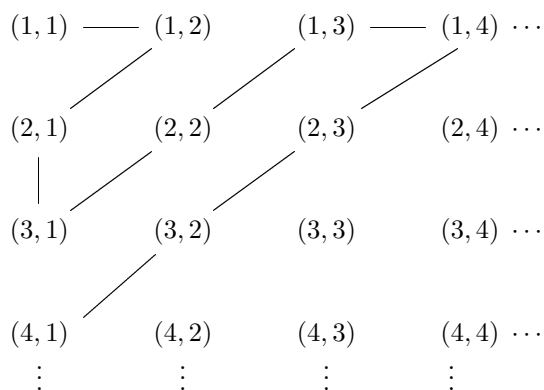
(3.1) Satz. *Jede nicht leere Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar. Jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

Beweis: Die erste Behauptung ist trivial. Zur zweiten: Sei $\Lambda = \{\lambda(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ die abgezählte Indexmenge, und zu jedem $\lambda \in \Lambda$ sei $X_\lambda = \{x_m^\lambda \mid m \in \mathbb{N}\}$ die zugehörige abgezählte Menge. Die Vereinigung, um die es geht, ist

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{\lambda(n)} = \{x_m^{\lambda(n)} \mid (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Es genügt nun, eine Surjektion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ anzugeben, also alle Paare natürlicher Zahlen in einer Folge zu durchlaufen. Das tut die

Cauchy-Abzählung: Ordne die Paare in nachfolgendem Schema an, und durchlaufe nacheinander die Diagonalen $\{(m, n) \mid m+n = k\}$, $k = 2, 3, \dots$



□

Demnach sind \mathbb{N} , $-\mathbb{N}$, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \cdot \mathbb{Z}$ abzählbar. Das weiß man erst zu würdigen, wenn man folgendes dagegenhält:

(3.2) Satz von Cantor. *Ein nicht leeres offenes reelles Intervall ist nicht abzählbar. Die Potenzmenge von \mathbb{N} , also die Menge der Teilmengen von \mathbb{N} , ist nicht abzählbar.*

Beweis: Angenommen, die Potenzmenge von \mathbb{N} wäre abzählbar, also wir hätten eine Abzählung

$$(X_n \mid n \in \mathbb{N})$$

aller Teilmengen von \mathbb{N} , so definiere eine Teilmenge $Y \subset \mathbb{N}$ durch

$$n \in Y \iff n \notin X_n.$$

Dann ist $Y \neq X_n$ für alle n , denn wäre $Y = X_n$, so ergäbe sich der Widerspruch $n \in Y \iff n \notin Y$. Das zeigt die zweite Behauptung.

Die Teilmengen $X \subset \mathbb{N}$ entsprechen umkehrbar eindeutig ihren **charakteristischen Funktionen** $\chi_X : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, die durch

$$\chi_X(n) = 1 \iff n \in X$$

erkärt sind. Demnach ist also auch die Menge aller Folgen, die nur die Werte 0, 1 annehmen, nicht abzählbar. Jede solche Folge kann man als Dezimalzahl

$$0, a_1 a_2 \dots, \quad \text{mit } a_j \in \{0, 1\}$$

deuten, und wenn schon diese eine nicht abzählbare Menge bilden, so erst recht das ganze Intervall $(0, 1)$, und dann jedes Intervall (a, b) , $a < b$, weil sich $(0, 1)$ bijektiv darauf abbilden läßt durch

$$t \mapsto (1 - t)a + tb.$$

Ist also das Intervall $(0, 1)$ nicht abzählbar, so auch (a, b) nicht. \square

Der Beweis zeigt in Wahrheit ganz allgemein, daß sich eine Menge nie bijektiv auf ihre Potenzmenge abbilden läßt.

Eine reelle Zahl heißt **algebraisch**, wenn sie Wurzel eines Polynoms $f \neq 0$ mit ganzen Koeffizienten ist. Man sieht mit (3.1) sehr leicht, daß es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt: Zu jedem Grad gibt es nur abzählbar viele Polynome, es gibt nur abzählbar viele Grade, und zu jedem Polynom nur endlich viele Wurzeln. Die meisten reellen Zahlen sind also nicht algebraisch, aber es ist nicht so leicht, auch nur eine anzugeben, und der Beweis, daß e und π nicht algebraisch sind, war ein großer und berühmter Erfolg der Mathematik des vorigen Jahrhunderts.

Der Anfänger wird immer bestrebt sein, Folgen oder Funktionen, die er bräuchte, möglichst explizit und in Formeln dastehen zu haben, am liebsten mit den ihm schon vorgestellten Zeichen und Symbolen. Indessen kann man durch Verkettung von endlich vielen Zeichen auf dem Papier im ganzen natürlich nur abzählbar viele Formeln erzeugen, während es überabzählbar viele Folgen gibt ...

§ 4. Metrische Räume

Ein **metrischer Raum** X besteht aus einer Menge, die wir mit demselben Buchstaben X bezeichnen, und deren Elemente wir **Punkte** nennen, sowie einer **Metrik**

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

die einem Paar von Punkten $x, y \in X$ ihren **Abstand** $d(x, y)$ zuordnet, so daß folgendes erfüllt ist:

- (i) $d(x, y) = 0$ genau wenn $x = y$.
- (ii) *Symmetrie:* $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iii) *Dreiecksungleichung:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Aus diesen Axiomen folgt: $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$, also

$$d(x, y) \geq 0.$$

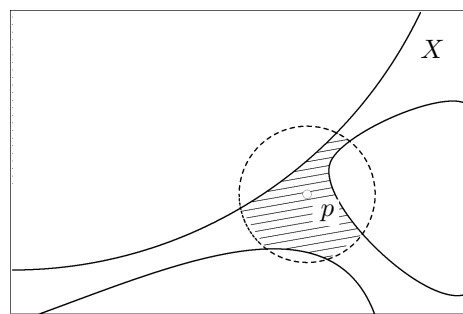
Wir kennen schon viele metrische Räume. Jeder normierte Vektorraum $(V, |\cdot|)$ wird ein metrischer Raum durch die Metrik

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes X wird ein metrischer Raum durch Einschränkung der Metrik auf die Teilmenge, also auf $U \times U$. Diese Räume heißen **Unterräume** von X .

Ist X ein metrischer Raum, $p \in X$ ein Punkt und $\varepsilon > 0$, so erklärt man die ε -**Umgebung** von p oder **offene Kugel vom Radius** ε um p als

$$U_\varepsilon(p) = \{x \in X \mid d(x, p) < \varepsilon\}.$$

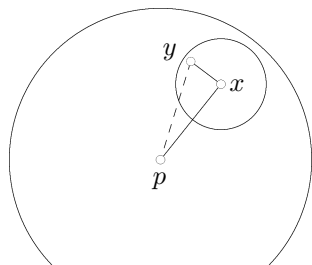


$U_\varepsilon(p)$ in einem Unterraum von \mathbb{R}^2

Eine **Umgebung** von p ist eine Teilmenge U von X , die eine ε -Umgebung von p enthält, also $p \in U_\varepsilon(p) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$. Eine Teilmenge U von X heißt **offen**, wenn sie mit jedem Punkt $p \in U$ noch eine Umgebung von p enthält.

(4.1) Beispiel. Die offenen Kugeln $U_r(p)$ sind offen.

Beweis: Ist $x \in U_r(p)$, also $d(x, p) < r$, und $\varepsilon = r - d(x, p)$, so ist $U_\varepsilon(x) \subset U_r(p)$, denn für $y \in U_\varepsilon(x)$ ist $d(y, x) < \varepsilon$, also $d(y, p) \leq d(y, x) + d(x, p) < \varepsilon + d(x, p) = r$. \square



(4.2) Eigenschaften offener Mengen.

- (i) Der ganze Raum X und \emptyset sind offen.
- (ii) Sind U_1, \dots, U_k offen, so auch $U_1 \cap \dots \cap U_k$.
- (iii) Sind die Mengen U_λ für $\lambda \in \Lambda$ offen in X , so auch ihre Vereinigung $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

Beweis: (i) ist offenbar. (ii) Ist $p \in U_1 \cap \dots \cap U_k$, so hat p in jeder Menge U_j eine ε_j -Umgebung, und ist $\varepsilon = \min\{\varepsilon_j \mid j = 1, \dots, k\}$, so liegt die ε -Umgebung von p in allen U_j , also im Durchschnitt.

(iii) Ein Punkt $p \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ liegt in einer Menge U_λ , dort hat er eine Umgebung, und diese ist dann auch in der Vereinigung der U_λ enthalten. \square

Hier sind wir nun bei dem Grundbegriff angekommen, den man heute an den Anfang zu stellen pflegt. Kennen wir einmal die offenen Mengen, so können wir sagen: Eine Teilmenge V von X ist eine Umgebung von $p \in X$, wenn es eine offene Menge U gibt, mit $p \in U \subset V$. In der Tat, hat man eine Umgebung nach unseren

bisherigen Erklärungen, so kann man eine ε -Umgebung für U nehmen, siehe (4.1). Und hat man die offene Menge U , so enthält sie ja insbesondere eine ε -Umgebung von p . Metrische Räume haben die

(4.3) Hausdorffeigenschaft. *Verschiedene Punkte p, q aus X haben disjunkte Umgebungen.*

Beweis: Wähle $\varepsilon = d(p, q)/2$, dann sind die ε -Umgebungen von p und q disjunkt nach der Dreiecksungleichung. \square

Eine Folge (x_n) in X **konvergiert** gegen $p \in X$, wenn in jeder Umgebung von p schließlich alle x_n liegen. Die Hausdorffeigenschaft sorgt für die Eindeutigkeit des Grenzwertes. Je nachdem, welche Metrik man zugrundelegt, erhält man so verschiedene Sorten Konvergenz. Zum Beispiel die Supremumsnorm auf dem Raum der beschränkten Funktionen auf einem Raum führt zu der gleichmäßigen Konvergenz, und diese ist verschieden von der L^2 -Konvergenz in dem Raum der stetigen Funktionen (auf einem Intervall) mit der L^2 -Metrik.

Auch das Cauchy-Kriterium können wir in einem beliebigen metrischen Raum formulieren — hier wird wirklich die Metrik benutzt. Eine Folge (x_n) ist eine **Cauchy-Folge** wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d(x_{m+k}, x_m) < \varepsilon.$$

Aber Cauchy-Folgen müssen nicht konvergieren. Hier hilft eine Definition: Ein metrischer Raum heißt **vollständig** oder **komplett**, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert. Wir kennen Beispiele:

(4.4) Bemerkung. *Der Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf $D \neq \emptyset$ mit der Supremumsnorm ist vollständig.*

Der euklidische Raum \mathbb{R}^n ist vollständig.

Beweis: Das erste haben wir in (II, 4.5) festgestellt. Das zweite ist der Spezialfall $D = \{1, \dots, n\}$. Es kommt nicht darauf an, welche der von uns betrachteten Metriken auf \mathbb{R}^n man nimmt, weil sich jeweils eine durch die andere mit einem konstanten Faktor (1 oder \sqrt{n}) abschätzen läßt. \square

Tatsächlich kann man in der Bemerkung für D einen beliebigen Raum nehmen, es braucht kein Intervall zu sein. Das alte Argument in (II, 4.5) übersteht jede Verallgemeinerung.

Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt ein **Banachraum**. Ein vollständiger euklidischer Vektorraum heißt ein **Hilbertraum**. Eine Folge im \mathbb{R}^n konvergiert genau dann, wenn für $j = 1, \dots, n$ die Folge der j -ten Komponenten der gegebenen Folge konvergiert.

Auch Beispiele für nicht komplette Räume gibt man leicht an: Man braucht nur aus einem kompletten Raum einen Limespunkt herauszunehmen. So ist zum Beispiel $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ unvollständig, denn $(a + 1/n)$ ist hierin eine nicht konvergente Cauchyfolge. Auch der Raum F_a^b , $a < b$, der Riemann-integrablen Funktionen mit der L^2 -Norm ist unvollständig. Das ist ein wesentlicher Mangel des Riemannintegrals.

§ 5. Topologische Räume

Hier erreichen wir den höchsten Grad der Abstraktion: Die Eigenschaften offener Mengen (4.2) machen wir zur

Definition. Ein **topologischer Raum** X besteht aus einer Menge, die wir auch mit X bezeichnen, zusammen mit einer Topologie auf dieser Menge. Die **Topologie** ist eine Menge \mathcal{O} von Teilmengen von X . Diese heißen **offen** in X . Über sie wird folgendes gefordert:

- (i) Der ganze Raum X und \emptyset sind offen.
- (ii) Sind U_1, \dots, U_k offen, so auch $U_1 \cap \dots \cap U_k$.
- (iii) Sind die Teilmengen U_λ , $\lambda \in \Lambda$, offen in X , so auch ihre Vereinigung $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

Die Elemente von X nennen wir **Punkte**. Eine **Umgebung** eines Punktes $p \in X$ ist eine Menge $V \subset X$, sodaß es eine offene Menge $U \subset X$ gibt, mit $p \in U \subset V$. Mit dieser Definition kommt es dann wieder so heraus, daß eine Teilmenge U von X genau dann in X offen ist, wenn sie mit jedem Punkt noch eine Umgebung des Punktes enthält, und weil Obermengen von Umgebungen ja auch Umgebungen sind heißt das, U ist offen in X genau wenn U eine Umgebung jedes Punktes von U ist: Die offenen Mengen sind ja Umgebungen ihrer Punkte, und umgekehrt wenn U eine Umgebung jedes Punktes $p \in U$ ist, so enthält U eine offene Menge V_p mit $p \in V_p \subset U$, und dann ist U die Vereinigung der offenen Mengen V_p , $p \in U$, also offen.

Der topologische Raum X heißt **hausdorffsch**, wenn je zwei verschiedene Punkte aus X disjunkte Umgebungen besitzen. Statt disjunkt sagt man auch **fremd**. Wir werden fortan im allgemeinen nur hausdorffsche topologische Räume betrachten. Aber man hat auf X immer die **größte** Topologie, für die nur X und \emptyset offen sind, und sie ist natürlich nicht hausdorffsch, wenn X mindestens zwei Punkte hat. Man hat auch immer die **diskrete** Topologie auf X , für die jede Teilmenge offen ist. Sie ist hausdorffsch.

Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge, so hat man eine Topologie auf Y durch die Festsetzung: U ist offen in Y , wenn es eine offene Menge V in X gibt, mit $U = V \cap Y$. Der Raum Y mit dieser Topologie heißt **Teilraum** oder **Unterraum** von X und seine Topologie die **Teilraumtopologie**.

Jeder metrische Raum hat eine durch die Metrik induzierte Topologie, die wir im letzten Abschnitt kennengelernt haben.

Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Man sagt, ein Punkt $p \in X$ **berührt** A oder er ist ein **Berührungspunkt** von A , wenn jede Umgebung von p auch Punkte aus A enthält. Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$, $p = 0$ oder $p = 1$. Natürlich berühren die Punkte von A auch A , und A heißt **abgeschlossen** in X , wenn jeder Punkt $p \in X$, der A berührt, zu A gehört.

(5.1) Bemerkung. *Genau dann ist A abgeschlossen in X , wenn das Komplement $X \setminus A$ offen in X ist.*

Beweis: Sei A abgeschlossen in X und $p \notin A$, dann berührt p auch A nicht, besitzt also eine Umgebung, die A nicht trifft, die also auch in $X \setminus A$ liegt, und das zeigt, daß $X \setminus A$ offen ist.

Sei umgekehrt $X \setminus A$ offen, dann ist $X \setminus A$ eine Umgebung jedes Punktes von $X \setminus A$, und sie trifft A nicht, also kein Punkt aus $X \setminus A$ berührt A . \square

Durch Übergang zum Komplement erhält man also aus der Definition einer Topologie:

(5.2) Bemerkung. *Der Raum X und \emptyset sind abgeschlossen, endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Teilmengen von X sind abgeschlossen.* \square

Ist Y eine beliebige Teilmenge von X , so enthält Y eine größte offene Menge, die Vereinigung aller in X offenen Teilmengen von Y . Diese heißt das **Innere** $\overset{\circ}{Y}$ von Y . Auch liegt Y in einer kleinsten abgeschlossenen Teilmenge, dem Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X , die Y enthalten. Diese heißt der **Abschluß** \bar{Y} von Y und besteht aus allen Punkten $p \in X$, die Y berühren. Die Teilmenge Y heißt **dicht in X** , wenn $\bar{Y} = X$.

Ist X metrisch, so können wir den Abschluß auch wie folgt beschreiben:

(5.3) Bemerkung. Sei X metrisch und $Y \subset X$. Genau dann ist $p \in \overline{Y}$, wenn es eine Folge (y_n) in Y gibt, die gegen p konvergiert.

Beweis: Angenommen $p \in \overline{Y}$, so berührt p die Menge Y und insbesondere die $1/n$ -Umgebung von p trifft Y in einem Punkt y_n . Die Folge (y_n) konvergiert dann gegen p . Konvergiert eine Folge (y_n) aus Y gegen p , so enthält jede Umgebung von p fast alle y_n , also p berührt Y . \square

Es gehört zu den grundlegenden Gestaltprinzipien der heutigen Mathematik, daß man nicht nur Objekte betrachtet, wie z.B. Gruppen, Vektorräume, \dots , sondern auch die zugehörigen Morphismen, also Homomorphismen, lineare Abbildungen \dots . So gehören zu den topologischen Räumen die stetigen Abbildungen.

Definition. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig** an der Stelle $p \in X$, wenn für jede Umgebung U von $f(p)$ das Urbild $f^{-1}U$ eine Umgebung von p ist. Die Abbildung heißt **stetig**, wenn sie an jeder Stelle in X stetig ist.

Dies letztere aber heißt:

(5.4) Bemerkung. Genau dann ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, wenn die Urbilder $f^{-1}U$ offener Mengen $U \subset Y$ stets offen in X sind.

Beweis: Jede Umgebung enthält eine offene, und eine Menge ist offen genau wenn sie eine Umgebung jedes ihrer Punkte ist. Ist also f stetig und U offen in Y , so ist U eine Umgebung jedes $f(p) \in U$, also $f^{-1}U$ eine Umgebung jedes $p \in f^{-1}U$, also $f^{-1}U$ offen. Sind

umgekehrt die Urbilder offener Mengen offen, so insbesondere die Urbilder offener Umgebungen von $f(p)$, und sie sind demnach Umgebungen von p , also f ist stetig. \square

Die Identität

$$\text{id} : X \rightarrow X, \quad x \mapsto x$$

ist stetig, und sind

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, \quad f(p) = q,$$

Abbildungen topologischer Räume, und ist f an der Stelle p und g an der Stelle q stetig, so $g \circ f$ an der Stelle p ; ist nämlich U eine Umgebung von $g(f(p))$ in Z , so ist $g^{-1}U$ eine Umgebung von $q = f(p)$, und $f^{-1}g^{-1}U = (g \circ f)^{-1}U$ eine Umgebung von p . Die Menge aller stetigen Abbildungen $X \rightarrow Y$ bezeichnen wir mit

$$C(X, Y) = C^0(X, Y).$$

Man spricht von der Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen. Ihre Isomorphismen heißen Homöomorphismen: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt ein **Homöomorphismus**, wenn f bijektiv ist, und f und f^{-1} stetig sind. Das heißt also: Genau dann ist U offen in X , wenn $f(U)$ offen in Y ist.

Beachte. *Es genügt nicht, daß f stetig und bijektiv ist.*

Zum Beispiel jede injektive Abzählung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ ist stetig und bijektiv, aber sie ist nie ein Homöomorphismus, weil \mathbb{N} diskret ist, \mathbb{Q} aber nicht.

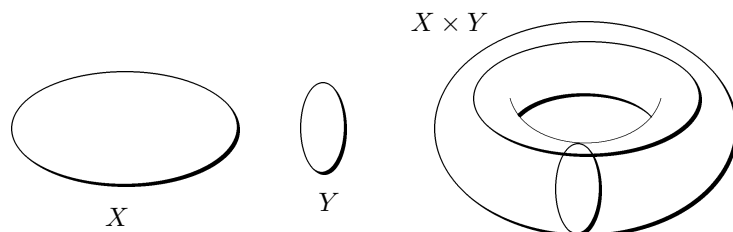
Existiert zwischen X und Y ein Homöomorphismus, so heißen die Räume **homöomorph**.

Zum Beispiel ist der Würfel der Punkte $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $|x_j| \leq 1$ homöomorph zur Kugel der $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \leq 1$. Als topologische Räume betrachtet sind Kugel und Würfel gleicher Gestalt. Warum?

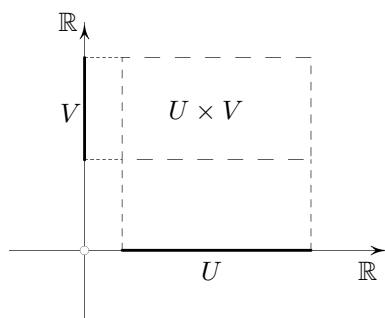
§ 6. Summen, Produkte und Quotienten

Das **Produkt** $X \times Y$ zweier topologischer Räume X, Y ist wie folgt erklärt:

Als Menge ist $X \times Y$ das cartesische Produkt, also die Menge aller Paare (x, y) , mit $x \in X$ und $y \in Y$. Die offenen Mengen des Produkts sind die beliebigen Vereinigungen von Mengen $U \times V \subset X \times Y$, wo U offen in X und V offen in Y ist.



Nicht etwa alle offenen Mengen des Produkts lassen sich so als Produkt $U \times V$ darstellen, zum Beispiel $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die offenen Mengen der Ebene sind **Vereinigungen** offener achsenparalleler Rechtecke.



Man hat die beiden **kanonischen Projektionen**

$$\text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X, \quad \text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow Y,$$

$\text{pr}_1(x, y) = x$, $\text{pr}_2(x, y) = y$, und eine Abbildung $f : Z \rightarrow X \times Y$ schreibt sich als Paar:

$$f = (f_1, f_2) : Z \rightarrow X \times Y, \quad f_1 = \text{pr}_1 \circ f, \quad f_2 = \text{pr}_2 \circ f.$$

Das Produkt hat folgende

(6.1) Universelle Eigenschaft des Produkts. *Man hat die kanonische Bijektion*

$$C(Z, X \times Y) \rightarrow C(Z, X) \times C(Z, Y), \quad f \mapsto (f_1, f_2).$$

Der Satz sagt mit anderen Worten: Eine Abbildung $Z \rightarrow X \times Y$ in das Produkt ist genau dann stetig, wenn beide Komponenten stetig sind.

Beweis: Jede Umgebung von $(x, y) \in X \times Y$ enthält eine Umgebung der Form $U \times V$ mit offenen Umgebungen U von x und V von y , und $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}U \cap f_2^{-1}V$. Daraus liest man leicht ab, daß f genau dann stetig ist, wenn f_1 und f_2 stetig sind. \square

Natürlich kann man auch Produkte mit mehr Faktoren betrachten, und $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z) = X \times Y \times Z \dots$. Das Produkt von Hausdorffräumen ist wieder hausdorffsch.

Die Bildung der topologischen Summe ist noch simpler als die des Produkts. Die **topologische Summe** $X \sqcup Y$ zweier topologischer Räume X, Y ist als Menge die disjunkte Vereinigung $X \sqcup Y$ der beiden Mengen, und eine Teilmenge $U \sqcup V$ ist offen genau wenn U offen in X und V offen in Y ist. Das heißt also, eine Teilmenge $W \subset X \sqcup Y$ ist offen genau wenn ihr Durchschnitt mit X und mit Y offen in X bzw. Y ist. Oder noch anders gesagt: X und Y mit ihrer kanonischen Inklusion in $X \sqcup Y$ sind offene Unterräume. Nun hat

man vielleicht Schwierigkeiten, die disjunkte Vereinigung zu bilden, wenn X und Y nun mal nicht disjunkt sind. In diesem Fall bildet man das Produkt $(X \cup Y) \times \{0, 1\}$ und hat darin:

$$X \sqcup Y = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$$

Man hat die kanonischen Inklusionen der beiden Summanden:

$$i_1 : X \rightarrow X \sqcup Y, \quad x \mapsto (x, 0) \quad \text{und} \quad i_2 : Y \rightarrow X \sqcup Y, \quad y \mapsto (y, 1),$$

und die Topologie ist so, daß dies Homöomorphismen auf ihr Bild und die Bilder offen sind. Die topologische Summe hat folgende

(6.2) Universelle Eigenschaft der Summe. *Man hat die kanonische Bijektion*

$$C(X \sqcup Y, Z) \rightarrow C(X, Z) \times C(Y, Z), \quad f \mapsto (f \circ i_1, f \circ i_2).$$

Beweis: Dies sagt: Eine Abbildung $f : X \sqcup Y \rightarrow Z$ ist stetig, genau wenn ihre Einschränkung auf X und Y stetig ist. Und das ist klar. \square

Eine naheliegende Weise und in der Tat eine klassische Methode, topologische Räume zu beschreiben und zu untersuchen, besteht darin, daß man einen neuen Raum aus zwei einfacheren Teilräumen X und Y zusammenklebt:

Man führt auf $X \sqcup Y$ eine Äquivalenzrelation ein, bei der jeder Punkt zu sich selbst, und sonst nur höchstens zu einem anderen äquivalent ist, mit dem er verklebt (identifiziert) werden soll. Der Quotient, der Raum der Klassen $(X \sqcup Y)/\sim$, erhält die Quotiententopologie für die kanonische Projektion $X \sqcup Y \rightarrow (X \sqcup Y)/\sim$. Sie ist wie folgt erklärt:

Sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Eine Teilmenge $U \subset Y$ ist offen in der **Quotiententopologie** für f auf Y , genau wenn $f^{-1}U$ offen in X ist. Weil $f^{-1}\bigcup_{\lambda} U_{\lambda} = \bigcup_{\lambda} f^{-1}U_{\lambda}$, und $f^{-1}\bigcap_{\lambda} U_{\lambda} = \bigcap_{\lambda} f^{-1}U_{\lambda}$, ist dies eine Topologie auf Y . Sie hat folgende

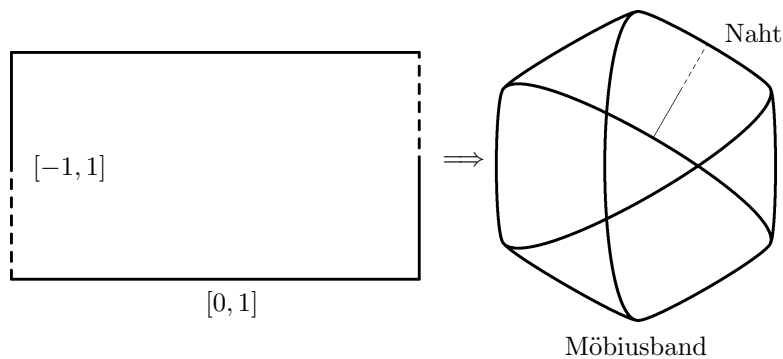
(6.3) Universelle Eigenschaft der Quotiententopologie.

Eine Abbildung $g : Y \rightarrow Z$ des Quotientenraumes in einen topologischen Raum Z ist genau dann stetig, wenn die Zusammensetzung $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig ist:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \swarrow g \\ & & Z \end{array}$$

Beweis: Daß g stetig ist heißt: $g^{-1}U$ ist offen in Y , falls U offen in Z ist, und das heißt nach Definition der Quotiententopologie: $f^{-1}g^{-1}U$ ist offen, also $(g \circ f)^{-1}U$ ist offen in X . Das heißt aber, daß $g \circ f$ stetig ist. \square

Ein Beispiel für einen interessanten Raum, den man so durch Verkleben gewinnt, ist das **Möbiusband**. Man gewinnt es als Quotient des Rechtecks $[0, 1] \times [-1, 1]$, indem man $(0, t)$ mit $(1, -t)$ identifiziert:



Was erhält man, wenn man das Möbiusband entlang der Seele

$$\{(s, 0) \mid s \in [0, 1]\}$$

aufschneidet? Kann man beim Möbiusband von einer Vorder- und einer Rückseite reden?

Ein damit verwandtes wichtiges Beispiel bilden die **reellen projektiven Räume** $\mathbb{R}P^n$. Diese schönen Räume entstehen aus den Sphären $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ durch Identifikation antipodischer Punkte:

$$\mathbb{R}P^n = S^n / x \sim -x.$$

§ 7. Kompakte Räume

Sei X ein topologischer Raum. Eine **offene Überdeckung** von X ist eine Familie $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ offener Teilmengen von X , sodaß $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Auch wenn X ein Teilraum von Y ist, und die U_λ offen in Y sind, nennt man die Familie $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ eine offene

Überdeckung von X , wenn $X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Die Überdeckung heißt **endlich**, wenn Λ endlich ist, und ebenso sagt man, eine Überdeckung $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ **enthält** die Überdeckung $(U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma)$, wenn $\Gamma \subset \Lambda$. Ein hausdorffscher topologischer Raum X heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche offene Überdeckung enthält. Geht man zu Komplementen über, so erhält man die äquivalente Beschreibung:

(7.1) Notiz. *Genau dann ist ein hausdorffscher Raum X kompakt, wenn folgendes gilt: Ist $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen in X und $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ leer, so gibt es eine endliche Indexmenge $\Gamma \subset \Lambda$ mit $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \emptyset$.*

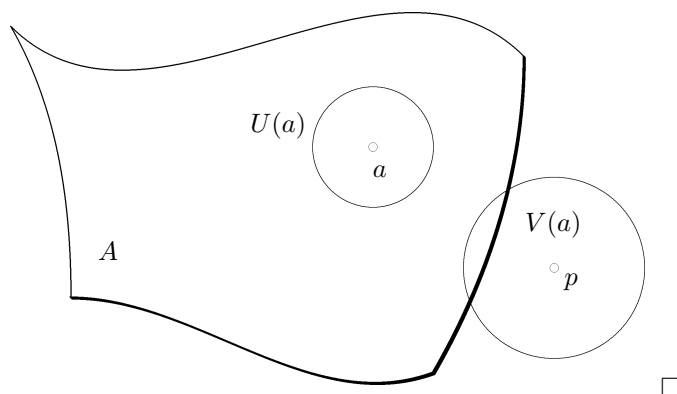
Damit man bei den nachfolgenden Erklärungen einen Leitstern vor Augen hat, will ich gleich vorweg sagen, daß die kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n genau die beschränkten und abgeschlossenen sind. Alles Allgemeine, was wir jetzt lernen, ist uns für kompakte Intervalle schon begegnet. Ein diskreter kompakter Raum ist natürlich einfach eine diskrete endliche Menge, und in vielen Situationen ist Kompaktheit die passende topologische Verallgemeinerung von Endlichkeit. Doch nun eins nach dem anderen.

(7.2) Satz. *Ist X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist auch A kompakt. Ist umgekehrt X hausdorffsch und $A \subset X$ kompakt, so ist A abgeschlossen. Die abgeschlossenen Teilmengen eines kompakten Raumes sind also genau die kompakten Teilräume.*

Beweis: Sei $(F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen in A mit leerem Durchschnitt. Dann ist jedes F_λ auch abgeschlossen in X , und weil X kompakt ist, gibt es eine endliche Indexmenge $\Gamma \subset \Lambda$, sodaß schon $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma = \emptyset$. Das zeigt die erste Behauptung.

Nun sei X hausdorffsch und $p \notin A$. Wir suchen eine Umgebung von p , die A nicht trifft.

Nun, zu jedem $a \in A$ findet man eine offene Umgebung $U(a)$ von a und $V(a)$ von p mit $U(a) \cap V(a) = \emptyset$. Endlich viele $U(a)$ überdecken A , und der Durchschnitt der entsprechenden $V(a)$ liegt in ihrem Komplement, trifft also A nicht, und ist eine Umgebung von p .



Im allgemeinen hängt es von dem umgebenden Raum X ab, ob eine Teilmenge $A \subset X$ abgeschlossen ist, und nicht nur von der auf A induzierten Topologie. Ist aber X hausdorffsch und $A \subset X$ kompakt, so erzwingt diese innere Eigenschaft von A , daß A in X abgeschlossen ist. Und in einem kompakten Raum X sind die abgeschlossenen Teilmengen genau die kompakten.

(7.3) Satz. *Ist X kompakt, Y hausdorffsch und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist $f(X)$ auch kompakt, und $f(X)$ hat die Quotiententopologie für f .*

Beweis: Sei $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ eine offene Überdeckung von $f(X)$, dann ist $\{f^{-1}U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ eine offene Überdeckung von X . Weil X kompakt ist, gibt es eine endliche Indexmenge $\Gamma \subset \Lambda$, sodaß die Familie $(f^{-1}U_\lambda \mid \lambda \in \Gamma)$ noch X überdeckt, und dann ist auch $(U_\lambda \mid \lambda \in \Gamma)$ eine endliche Überdeckung von $f(X)$. Also ist $f(X)$ kompakt. Ist nun $A \subset f(X)$ und $f^{-1}A$ abgeschlossen, so ist $f^{-1}A$ kompakt, also ist auch $A = ff^{-1}A$ kompakt, also ist A abgeschlossen. Mithin ist $A \subset f(X)$ abgeschlossen, genau wenn $f^{-1}A$ in X abgeschlossen ist, und das zeigt, daß $f(X)$ die Quotiententopologie für $f : X \rightarrow f(X)$ trägt. \square

Dieser Satz hat folgende bemerkenswerte Konsequenz:

(7.4) Satz. *Ist X kompakt, Y hausdorffsch und $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis: A ist abgeschlossen in Y genau wenn $f^{-1}A$ abgeschlossen in X ist. \square

Im allgemeinen, wie wir schon bemerkt haben, muß die Umkehrabbildung einer stetigen Bijektion nicht stetig sein, siehe die Abzählungen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Aber wenn die beteiligten Räume kompakt sind, so ist die Umkehrung einer stetigen Bijektion automatisch stetig. Für Intervalle haben wir das früher schon festgestellt.

Wir wissen jetzt schon, daß ein kompakter Teilraum eines metrischen Raumes abgeschlossen ist. Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d) heißt **beschränkt**, wenn es einen Punkt $p \in X$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß K in der Kugel um p vom Radius n liegt:

$$K \subset \{x \in X \mid d(x, p) < n\}.$$

(7.5) Satz. *Ein kompakter Teilraum eines metrischen Raumes ist beschränkt.*

Beweis: Ist X der metrische Raum und $p \in X$, so wird das ganze X , also insbesondere die kompakte Menge K , von der Familie aller Kugeln $\{x \mid d(x, p) < n\}$, $n \in \mathbb{N}$, überdeckt, also K von endlich vielen, also von einer, der mit dem größten n . \square

Eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n ist also beschränkt und abgeschlossen. Um auch die Umkehrung zu zeigen, müssen wir nur beweisen, daß ein Würfel $\{x \mid \|x\| \leq r\}$ kompakt ist, denn jede beschränkte abgeschlossene Menge liegt in so einem Würfel und ist damit nach (7.2) auch kompakt. Wir zeigen zunächst:

(7.6) Lemma. *Ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.*

Beweis: Sei $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ eine offene Überdeckung des Intervalls. Wir finden dann ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $p \in [a, b]$ liegt die δ -Umgebung von p in einem U_λ , $\lambda \in \Lambda$. Haben wir das, so zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle der Länge kleiner δ . Weil jedes Teilintervall in einem U_λ , $\lambda \in \Lambda$ liegt, wird das ganze von endlich vielen überdeckt.

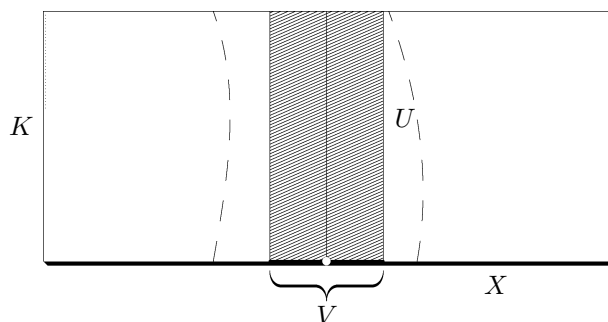
Nun zum Finden von δ . Angenommen, so ein δ existiert nicht, dann ist auch $\delta = 1/n$ für kein n gut. Wir finden demnach ein $p_n \in [a, b]$, sodaß die $1/n$ -Umgebung von p_n in keinem U_λ , $\lambda \in \Lambda$, liegt. Nach Bolzano-Weierstraß, Übergang zu einer Teilfolge, dürfen wir annehmen, daß die Folge (p_n) gegen ein $p \in [a, b]$ konvergiert. Dieser Punkt p aber hat eine ε -Umgebung, die ganz in einer der Mengen U_λ , $\lambda \in \Lambda$, enthalten ist. Ist dann n so groß gewählt, daß $|p_n - p| < \varepsilon/2$ und $1/n < \varepsilon/2$, so liegt auch die $1/n$ -Umgebung von p_n noch in der ε -Umgebung von p und damit in U_λ , ein Widerspruch.

✘

\square

Man sieht am Beweis, daß dieses Lemma die eigentliche Quintessenz des Satzes über gleichmäßige Stetigkeit enthält. Nun müssen wir noch zeigen, daß ein Produkt kompakter Räume kompakt ist. Auf dem Wege dahin liegt das auch für sich nützliche

(7.7) Tubenlemma. Sei K kompakt, $p \in X$ und U offen in $X \times K$, mit $\{p\} \times K \subset U$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subset X$ von p mit $V \times K \subset U$. Man nennt $V \times K$ eine **Tubenumgebung** von $\{p\} \times K$ in $X \times K$.



Beweis: Zu jedem $k \in K$ gibt es eine offene Umgebung V_k von p in X und W_k von k in K mit $(p, k) \in V_k \times W_k \subset U$. Die W_k , $k \in K$, überdecken K , und das tun auch endlich viele von ihnen. Sei V der Durchschnitt der entsprechenden V_k , dann ist

$$V \times K \subset \bigcup_k (V_k \times W_k) \subset U. \quad \square$$

(7.8) Satz. Ein Produkt hausdorffscher Räume ist hausdorffsch. Ein Produkt kompakter Räume ist kompakt.

Beweis: Sind $(p, q) \neq (x, y)$ in $X \times Y$, und sind X, Y hausdorffsch, so ist $p \neq x$ oder $q \neq y$. Im ersten Fall haben p und x fremde

Umgebungen U und V in X , und daher (p, q) und (x, y) die fremden Umgebungen $U \times Y$ und $V \times Y$. Im zweiten Fall analog. Sind nun X und Y kompakt, und ist $(U_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$, so wird jede Faser $\{p\} \times Y$, $p \in X$, von endlich vielen U_λ überdeckt, und diese überdecken nach dem Tubenlemma auch noch eine Menge $V_p \times Y$ für eine offene Umgebung V_p von p in X . Aber endlich viele solche V_p überdecken X . \square

Alles in allem wissen wir jetzt, daß Intervalle $[a, b]$ kompakt sind, also Würfel als Produkte kompakter Intervalle, also deren abgeschlossene Teilmengen, das heißt beschränkte und abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R}^n , und auch die Umkehrung haben wir bewiesen:

(7.9) Satz von Heine-Borel. *Eine Teilmenge des \mathbb{R}^n ist genau dann kompakt (als Unterraum), wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

\square

Es ist hier wesentlich, daß wir einen endlichdimensionalen euklidischen Raum betrachten. In einem metrischen Raum (X, d) kann man immer die neue beschränkte Metrik $\tilde{d} = \min\{d, 1\}$ einführen, die dieselbe Topologie induziert. In einem beliebigen metrischen Raum ist also aus der Beschränktheit einer Menge nichts zu schließen.

Bemerken wir zum Schluß, wie sich einiges, was wir für kompakte Intervalle kennen, jetzt verallgemeinert.

(7.10) Satz. *Eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem nicht leeren kompakten Raum X ist beschränkt und nimmt ein Maximum und Minimum an.*

Beweis: Das Bild $f(X) \subset \mathbb{R}$ ist nicht leer und kompakt, also beschränkt und abgeschlossen, und enthält daher sein Supremum und Infimum. \square

(7.11) Satz von Bolzano-Weierstraß. *Jede Folge in einem kompakten metrischen Raum X besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Zu jedem $p \in X$ betrachte die Umgebungen vom Radius $1/n$. Wäre der Satz falsch, so dürfen für jedes p schließlich diese Umgebungen nur noch höchstens endlich viele Folgenglieder enthalten, denn sonst konstruiert man leicht eine gegen p konvergente Teilfolge. Nun, dann aber überdecken endlich viele solche Umgebungen, in die nur endlich viele Folgenglieder fallen, den ganzen Raum X , und folglich hätte die Folge nur endlich viele Glieder, ein Widerspruch. \square

(7.12) Satz. *Sei X metrisch, $K \subset X$ kompakt, auch Y metrisch und $f : X \rightarrow Y$ in jedem Punkt aus K stetig. Dann ist f auf K gleichmäßig stetig, das heißt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodaß für alle $x \in X$ und $p \in K$ gilt:*

$$d(x, p) < \delta \implies d(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Beachte, da nur einer der Punkte p und x in K sein muß.

Beweis: Weil f auf K stetig ist, finden wir zu $\varepsilon > 0$ und jedem $p \in K$ ein $\delta(p) > 0$, sodaß

$$d(x, p) < 2\delta(p) \implies d(f(x), f(p)) < \varepsilon/2.$$

Endlich viele Umgebungen $U_{\delta(p)}(p)$, $p \in \{p_1, \dots, p_k\}$ überdecken K . Sei δ das Minimum dieser $\delta(p_j)$. Ist nun $d(x, p) < \delta$, so auch $d(p, p_j) < \delta(p_j)$ für eines der p_j , also $d(x, p_j) < 2\delta(p_j)$, also $d(f(x), f(p)) \leq d(f(x), f(p_j)) + d(f(p), f(p_j)) < \varepsilon$. \square

Es wäre auch mit Folgen gegangen wie früher, aber so geht es auch.

§ 8. Zusammenhang

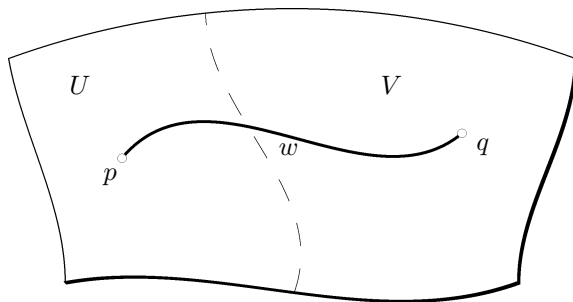
Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn er sich nicht in zwei disjunkte nicht leere offene Mengen zerlegen läßt. Das heißt mit anderen Worten, X ist nur auf die triviale Weise $X = X \sqcup \emptyset = \emptyset \sqcup X$ als topologische Summe zweier Räume darstellbar. Der Raum X heißt **bogenweise zusammenhängend**, wenn zu je zwei Punkten $p, q \in X$ ein verbindender stetiger **Weg**

$$w : [0, 1] \rightarrow X, \quad w(0) = p, \quad w(1) = q$$

existiert.

(8.1) Satz. *Ein bogenweise zusammenhängender Raum hängt zusammen.*

Beweis: Hätte man eine Zerlegung $X = U \sqcup V$, $U \cap V = \emptyset$, $p \in U$, $q \in V$, in zwei offene Mengen U und V , so verbinde man p und q durch einen Weg w .



Dann zerfällt das Einheitsintervall $[0, 1]$ disjunkt in die nicht leeren offenen Mengen $w^{-1}U$ und $w^{-1}V$. Aber das kann nicht sein, denn die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f|_{w^{-1}U} = 0$, $f|_{w^{-1}V} = 1$ wäre stetig,

weil lokal konstant, mit Werten nur 0 und 1, was dem Zwischenwertsatz widerspricht. \square

Insbesondere also Intervalle selbst sind zusammenhängend. Dagegen \mathbb{Q} hängt nicht zusammen, es zerfällt zum Beispiel in $\{q \mid q^2 < 2\}$ und $\{q \mid q^2 > 2\}$. Die Umkehrung des Satzes ist im allgemeinen nicht richtig, es gibt zusammenhängende Räume, die nicht bogenweise zusammenhängen.

Die Relation “**verbindbar**” ist eine Äquivalenzrelation, also

$$x \sim y \iff \text{Es gibt einen Weg } w : [0, 1] \rightarrow X \\ \text{mit } w(0) = x, w(1) = y.$$

Die Äquivalenzklassen heißen **Bogenkomponenten**. Hat nun jeder Punkt $p \in X$ eine Umgebung U von mit p verbindbaren Punkten, so sind die Bogenkomponenten offen, und X ist genau dann zusammenhängend, wenn es nur eine Bogenkomponente gibt, also wenn X bogenweise zusammenhängt. Dies gilt zum Beispiel für offene Teilräume des \mathbb{R}^n .

