

---

# Aufgaben

*Kommen Sie, meine Herren, wir müssen denken, ungestört denken! Der Mensch hat mich vorhin konfus gemacht, ich muß mir wieder heraushelfen.*

*König Peter*

## Zu Kapitel I

1. Skizziere folgende ebenen Kurven und berechne ihre Bogenlänge:

(i)  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t)$ ,  
die **Kardioide**, und

(ii)  $\delta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ,  $\delta(t) = e^{at}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(a) < 0$ ,  
die **logarithmische Spirale**.

2. Seien  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar, und sei  $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine bilineare Abbildung. Formuliere und beweise eine Produktregel für die Ableitung von  $t \mapsto \alpha(\gamma(t), \delta(t))$ .

3. Eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **homogen vom Grad**  $\alpha > 0$ , wenn gilt:

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ und } t > 0.$$

Zeige, daß  $f$  genau dann homogen vom Grad  $\alpha$  ist, wenn die **Eulersche Relation**

$$\alpha f(x) = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

überall erfüllt ist.

Hinweise: i) Differenziere  $g(t) := f(tx)$  bei  $t = 1$  nach  $t$ .

ii) Zeige:  $t\dot{g} = \alpha g$  lokal um  $t = 1 \implies g(t) = c \cdot t^\alpha$ .

4. Betrachte die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige: i)  $f$  ist am Ursprung stetig aber nicht differenzierbar.

ii) Für jede differenzierbare Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist auch  $f \circ \gamma$  differenzierbar. Insbesondere ist  $f$  überall partiell differenzierbar.

iii) Für die Kurve  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (t, t)$  gilt am Ursprung nicht die Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t).$$

5. Zeige, daß die Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = |x| \cdot x$ , überall differenzierbar ist, und berechne ihre Jacobimatrix.

6. Sei  $U$  eine zusammenhängende offene Menge in  $\mathbb{R}^n$ , seien  $K$  und  $a$  positive reelle Zahlen, und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Abbildung, sodaß

$$|f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y|^a$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

(i) Sei  $a > 1$ . Ist  $f$  differenzierbar?

Welche Funktionen  $f$  erfüllen dies?

(ii) Sei  $a \leq 1$ . Muß  $f$  differenzierbar sein?

7. Eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt **sternförmig** mit **Zentrum**  $p$ , wenn gilt: Für jedes  $u \in U$  und  $0 \leq t \leq 1$  ist auch  $p + t(u - p) \in U$ . Dies sei nun der Fall, und sei

$$v = (v_1, \dots, v_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

stetig differenzierbar. Zeige: Ist  $\partial v_i / \partial x_j = \partial v_j / \partial x_i$  für alle  $i, j$ , so ist  ${}^t v = \text{grad}(f)$  für eine  $C^2$ -Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(p) = 0$ .

Hinweis:  $d/dt f(p + tx) = ?$

Die Bedingung, daß  $f$  sternförmig ist, ist nicht überflüssig, Beispiel?

Hinweis: Die Polarkoordinate  $\varphi$  ist keine wohldefinierte Funktion, wohl aber  $\text{grad} \varphi = ?$

8. Berechne den Jet der Funktion  $f$  mit

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

an der Stelle  $(1, 1)$ . Was ergibt sich für  $\partial^3 f / \partial x^2 \partial y(1, 1)$ ?

9. Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine rotationssymmetrische  $C^\infty$ -Funktion, also konstant auf Sphären um den Ursprung. Zeige, daß es eine Potenzreihe  $p(t)$  einer Variablen gibt, sodaß

$$j_0^\infty f(x) = p(|x|^2).$$

10. Untersuche die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

11. Finde alle kritischen Punkte der Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = e^y \cos x + e^x \cos y.$$

12. Sei  $f$  eine  $C^\infty$ -Funktion auf einer offenen Kugel  $U$  um den Ursprung von  $\mathbb{R}^n$ . Zeige:

$$f(x) = j_0^k f(x) + \sum_{|\alpha|=k+1} \varphi_\alpha(x) \cdot x^\alpha$$

für  $C^\infty$ -Funktionen  $\varphi_\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Hinweis: Integraldarstellung des Restglieds der Taylorentwicklung.

13. Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\alpha$ -Funktion und homogen vom Grad  $\alpha$ . Zeige, daß  $f$  ein Polynom vom Grad  $\alpha$  ist.

14. Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion und  $p$  ein Polynom vom Grad  $k$ , so daß  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(h) - p(h)) / |h|^k = 0$ . Zeige:  $p = j_0^k f$ .

15. Die  $C^k$ -Funktion  $f$  habe am Ursprung den (homogenen!)  $k$ -Jet

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha,$$

und es sei  $k > 0$  und  $p(x) > 0$  für  $x \neq 0$ . Zeige, daß  $f$  am Ursprung ein lokales Minimum hat.

**16.** Zeige, daß die Funktion  $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$ , eingeschränkt auf eine beliebige Gerade durch den Ursprung, dort ein lokales Minimum hat. Ist der Ursprung auch ein lokales Minimum von  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ?

**17.** Bestimme alle lokalen Extrema der Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $f(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x + y)$  .

## Zu Kapitel II

**1.** Gegeben sei eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die in folgendem Sinne nahe der Identität ist. Für  $g(x) := x - f(x)$  sei

$$|g(x) - g(z)| \leq \lambda \cdot |x - z|$$

für alle  $x, z \in \mathbb{R}^n$ , mit einer Konstante  $\lambda < 1$ . Zeige, daß die Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow f(\mathbb{R}^n)$  ein Homöomorphismus ist.

**2.** Zeige, daß  $f(x) := x + \frac{1}{2^n}(|x|, \dots, |x|)$  eine bijektive Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert.

**3.** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, sei  $f$  ein Diffeomorphismus und  $g(x) = 0$  für  $x$  außerhalb von einem Kompaktum. Zeige, daß es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, sodaß auch  $f + \lambda g$  ein Diffeomorphismus ist, für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $|\lambda| < \varepsilon$ . Hinweis: Reduziere die Behauptung auf den Fall  $f = \text{id}$ .

**4.** Sei  $f$  eine  $C^2$ -Funktion und  $u$  ein kritischer Punkt von  $f$  mit nicht ausgearteter Hessematrix. Zeige, daß  $f$  in einer Umgebung von  $u$  keinen weiteren kritischen Punkt hat.

**5.** (i) Für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  bestimme die Punkte von  $\mathbb{R}^2$ , wo  $f$  lokal invertierbar ist.

Ist  $f$  surjektiv? Ist  $f$  injektiv?

(ii) Ebenso für  $f(x, y) = (e^{x+y} \cos(x - y), e^{x+y} \sin(x - y))$ .

6. Zeige, daß durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x^2 - y \cos(uv) + z^2 &= 0, \\x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 &= 2, \\xy - \sin(u) \cdot \cos(v) + z &= 0,\end{aligned}$$

lokal um  $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, \pi/2, 0)$  die Werte von  $x, y, z$  in  $\mathbb{R}^5$  als Funktionen von  $u$  und  $v$  eindeutig bestimmt sind, und berechne

$$\frac{\partial x}{\partial u}(\pi/2, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial v}(\pi/2, 0).$$

7. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetig differenzierbare Abbildung, deren Jacobimatrix überall regulär ist und nicht negative Koeffizienten hat. Zeige, daß  $f$  injektiv ist. Zeige, daß eine analoge Behauptung für  $\mathbb{R}^3$  falsch wäre. Hinweis: Beides ist nicht einfach.

8. Zeige, daß  $M := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^4 + z^4 = 1\}$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist. Gib eine Karte um den Punkt  $p = (0, 0, 1)$  von  $M$  und eine lineare Gleichung für den Tangentialraum  $T_p M \subset \mathbb{R}^3$  an.

Zeige, daß  $M$  homöomorph zur Sphäre  $S^2$  ist.

9. Sei  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 = 3\}$ . Zeige, daß  $M$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$  ist und beschreibe den Tangentialraum  $T_p(M)$  an  $p = (1, 1, 1)$  durch eine lineare Gleichung. Zeige, daß  $M$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$  ist.

10. Sei  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $\text{grad } f(x) = g(x) \cdot x$  für eine Funktion  $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeige, daß  $f$  auf Sphären um den Ursprung konstant ist.

11. Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit, sei  $p \in \mathbb{R}^n \setminus M$ , und die Abbildung  $M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |p - x|$  nehme im Punkte  $q \in M$  ein Minimum an. Zeige, daß der Vektor  $p - q$  zu  $T_q M$  orthogonal ist.

**12.** Sei  $G$  eine symmetrische reelle  $(n \times n)$ -Matrix,  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $b \in \mathbb{R}$ . Betrachte die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = {}^t x G x + 2 {}^t a x + b.$$

(i) Gib ein lineares Gleichungssystem für die Menge  $S$  der Punkte an, wo  $f = Df = 0$  ist.

(ii) Sei  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0, Df(x) \neq 0\}$ . Dann ist  $M$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $p \in M$ . Gib eine lineare Gleichung für die Tangente  $p + T_p M$  von  $M$  im Punkt  $p$  an.

**13.** Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare homogene Funktion, und sei  $M = \{f = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ . Sei  $V$  die Menge der Vektoren  $\dot{\gamma}(0)$  für  $C^1$ -Kurven  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma(0) = 0$ . Zeige:  $M = V$ .

**14.** Sei  $G$  eine symmetrische reelle  $(n \times n)$ -Matrix und sei  $f$  in Aufg. 13 durch  $f(x) = {}^t x G x$  gegeben. Zeige, daß  $V$  genau dann ein Vektorraum ist, wenn  $G$  semidefinit ist.

**15.** Bestimme die Punkte  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $x^4 + y^4 - 4xy = 9$ , die den größten und die den kleinsten Abstand vom Ursprung haben.

**16.** Berechne das Maximum und das Minimum von

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x - y + 2z$$

auf dem Ellipsoid  $M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$ .

**17.** In der Situation von (4.2) der Methode der Multiplikatoren ist die Hesseform von  $f|_M$  in  $p$  gegeben durch

$$H_p(f|_M) = H_p(f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n)|_{T_p M}.$$

Dies reduziert die Berechnung der Hesseform von  $f|_M$  in  $p$ , wenn man die erforderlichen Ableitungen der beteiligten Funktionen in  $p$  berechnet hat, auf eine Aufgabe der linearen Algebra.

Hinweis: Die Funktion  $f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n$  ist in  $p$  kritisch, und sie stimmt auf  $M$  mit  $f$  überein. Transformiert man nun  $\mathbb{R}^{m+n}$  lokal um  $p$ , so wird ihre Hesseform mit der Jacobischen der Transformation linear transformiert.

18. (i) Berechne die Enveloppe der Geradenschar in  $\mathbb{R}^2$ :

$$M_c = \{(x, y) \mid y - 2cx + c^2 = 0\}.$$

(ii) Gib eine Gleichung  $g(x, y, c)$  einer Geradenschar in  $\mathbb{R}^2$  an, deren Enveloppe die Kurve  $y = x^3$  ist. Hinweis: Dies ist etwas tückisch. Das Naheliegende erweist sich als mangelhaft. Kann man den Mangel beheben?

19. Führe in § 3 einiges näher aus, insbesondere:

(i) Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $C^\ell$ -Untermannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Abbildung. Definiere “ $f$  ist  $C^k$ ”. Definiere  $\text{rg}_x f$  für  $x \in M$ . Wann soll  $q \in \mathbb{R}^p$  ein singulärer Wert von  $f$  heißen?

Hinweis: Denke an die Tangentialabbildung von  $f$ .

(ii) Begründe die Beschreibung von  $T_{(x,c)}M$  auf Seite 69. Man kann z.B. annehmen:  $C = \{c \mid f(c) = 0\}$  für ein reguläres Gleichungssystem  $f$  auf  $\mathbb{R}^k$ .

(iii) Warum hat die Tangentialabbildung der Projektion  $p : M \rightarrow U$  stets mindestens den Rang  $n - 1$  ?

### Zu Kapitel III

1. Zeige, daß monotone Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  meßbar sind.

2. Sei  $X$  ein abzählbarer Meßraum. Zeige, daß  $X$  die disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen meßbaren Teilmengen  $A_n$  ist, wobei jedes  $A_n$  außer jeweils  $\emptyset$  und  $A_n$  keine meßbaren Teilmengen hat (abzählbare Mengen können auch endlich  $\neq \emptyset$  sein).

3. Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  und sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch

$$f(x) = \max\{0, \sup\{y \mid (x, y) \in U\}\}.$$

Zeige, daß  $f$  für die Borelalgebren meßbar ist.

4. Zeige, daß die Menge der reellen Zahlen, deren Dezimalentwicklung die Ziffer 2 enthält, in  $\mathbb{R}$  Borel-meßbar ist.

5. Sei  $(f_n)$  eine Folge meßbarer Funktionen auf dem Meßraum  $X$ . Zeige, daß die Menge  $\{x \in X \mid (f_n(x)) \text{ konvergiert}\}$  meßbar ist.

6. Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  eine Mengenalgebra mit einem Prämaß, sodaß die Maßregeln erfüllt sind, und sei  $\mu^*$  das induzierte äußere Maß auf der Potenzmenge von  $X$ . Sei  $M \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(M) < \infty$ , und  $Y \subset M$  eine Teilmenge, sodaß

$$\mu^*(Y) + \mu^*(M \setminus Y) = \mu^*(M).$$

Zeige, daß  $Y$  dann  $\mu^*$ -meßbar ist.

7. Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Zeige, daß durch

$$\mu^*(Y) = \min\{\mu(A) \mid Y \subset A \in \mathcal{A}\}$$

ein äußeres Maß auf der Potenzmenge von  $X$  definiert wird. Für dieses gilt

$$\mu^*(Y \cup Z) + \mu^*(Y \cap Z) \leq \mu^*(Y) + \mu^*(Z).$$

Eine Teilmenge  $Y \subset X$  ist genau dann  $\mu$ -meßbar, wenn sie  $\mu^*$ -meßbar ist, und in diesem Fall ist  $\mu(Y) = \mu^*(Y)$ .

8. Gilt für ein äußeres Maß auf der Potenzmenge einer Menge  $X$  stets

$$\mu^*(Y \cup Z) + \mu^*(Y \cap Z) \leq \mu^*(Y) + \mu^*(Z) ?$$

Hinweis: Untersuche kleine Mengen  $X$ .

9. (i) Eine Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **rechts stetig**, wenn für alle  $p \in \mathbb{R}$  stets  $\lim_{x \searrow p} F(x) = F(p)$  gilt. Nun sei  $\mu$  ein Maß auf  $\mathbb{R}$  und  $\mu(\mathbb{R})$  endlich. Zeige, daß durch  $F(x) = \mu(-\infty, x]$  eine rechtsstetige monoton wachsende Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert wird. Sie heißt die **Verteilung** von  $\mu$ .

(ii) Sei umgekehrt  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend und rechtsstetig. Zeige, daß die endlichen disjunkten Vereinigungen von Intervallen der Gestalt  $(a, b]$  eine Mengenalgebra  $\mathcal{A}$  auf  $\mathbb{R}$  bilden und daß durch

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a)$$

ein Prämaß auf  $\mathcal{A}$  definiert wird. Das induzierte Maß und Integral auf  $\mathbb{R}$  heißt nach **Stieltjes**.

**10.** Sei  $q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  eine Bijektion. Erkläre ein Maß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  durch

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \delta_{q(n)},$$

wobei  $\delta_q$  das Dirac-Maß für  $q$  ist. An welchen Stellen in  $\mathbb{R}$  ist die Verteilung von  $\mu$  unstetig?

**11.** (i) Sei  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  eine integrable Funktion und sei  $\lambda$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$ . Zeige, daß durch

$$\mu(Y) := \int_Y \varphi d\lambda$$

ein Maß auf  $\mathbb{R}$  definiert wird.

(ii) Konstruiere ein Maß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $\mu(\mathbb{R}) = 1$ , für das gilt: Genau dann ist  $Y \subset \mathbb{R}$  eine Nullmenge für  $\mu$ , wenn  $Y$  eine Nullmenge für das Lebesguemaß ist.

**12.** Sei  $X$  abzählbar,  $X \neq \emptyset$ , und  $\mu$  das Maß auf  $X$ , für das die einpunktigen Mengen meßbar vom Maß 1 sind. Zeige:

(i) Es gibt genau ein solches Maß.

(ii) Eine reelle Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann für dieses Maß integrierbar, wenn  $\sum_{x \in X} f(x)$  für irgendeine (und dann für jede) Abzählung von  $X$  absolut konvergiert.

(iii) Folgere: Ist die Reihe  $\sum_{n,m} a_{nm}$  für irgendeine Abzählung von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  absolut konvergent, so ist  $\sum_n (\sum_m a_{nm}) = \sum_{n,m} a_{nm}$ . (großer Umordnungssatz, Doppelreihensatz).

**13.** Zeige mit einem Konvergenzsatz, daß die Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

für  $s > 1$  stetig auf  $\mathbb{R}$  ist.

**14.** Sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung von Mengen. Zeige, daß durch

$$f_*\mu(A) := \mu(f^{-1}A)$$

ein Maßraum  $(Y, f_*\mathcal{M}, f_*\mu)$  erklärt wird.

Zeige, falls eine Seite existiert:

$$\int_X g \circ f \, d\mu = \int_Y g \, d(f_*\mu).$$

**15.** Zeige, daß der Raum der Riemann-integrablen Funktionen auf dem Einheitsintervall für die  $L^1$ -Norm nicht komplett ist.

**16.** Ein translationsinvariantes Maß für die Borelalgebra des  $\mathbb{R}^n$ , das für den Würfel im ersten Quadranten mit achsenparallelen Kanten der Länge 1 und 0 als Ecke das Maß 1 liefert, ist das Lebesgue-Maß. Hinweis: Zerlege den Würfel in gleiche Teile, verschiebe sie, approximiere Quader.

### Zu Kapitel IV

**1.** Berechne das Volumen der Teilmenge  $P \subset \mathbb{R}^3$  der Punkte  $(x, y, z)$  mit

$$0 \leq y \leq \sin x, \quad 0 \leq x \leq (\pi/2)(1 - z), \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Zeichne eine Skizze von  $P$ .

**2.** Berechne das Volumen der Menge  $P \subset \mathbb{R}^2$  der Punkte  $(x, y)$ , mit

$$(x^2 + y^2)^3 \leq 9x^2.$$

**3.** Berechne das Volumen von  $P \subset \mathbb{R}^n$ , wo  $P$  die Menge der Punkte

$$t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

mit  $0 \leq t_j$  und  $t_1 + \cdots + t_n \leq 1$  ist und die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $\mathbb{R}^n$  bilden.

**4.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Riemann-integrabel, wenn sie beschränkt ist, außerhalb einer beschränkten Menge in  $\mathbb{R}^n$  verschwindet, und fast überall stetig ist. Zeige, daß diese Funktionen Lebesgue-integrabel sind.

**5.** Berechne den Schwerpunkt und das Volumen der Menge  $P \subset \mathbb{R}^3$  der Punkte  $(x, y, z)$  mit

$$0 \leq z \leq \pi/2, \quad x^2 + y^2 \leq (1 - \cos z)^2.$$

6. Mit Fubini und der Relation  $1/x = \int_0^\infty e^{-xt} dt$  zeige:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

7. Sei  $I$  das Einheitsintervall und  $g_n : I \rightarrow [0, \infty)$  definiert durch:

$$g_n(t) = n(n+1) \quad \text{für} \quad \frac{1}{n+1} < t < \frac{1}{n}, \quad \text{und} \quad g_n(t) = 0 \quad \text{sonst.}$$

Definiere  $f : I \times I \rightarrow [0, \infty)$  durch

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y).$$

Berechne  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$  und  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$ .

Wie verträgt sich das Ergebnis mit dem Satz von Fubini?

8. Sei  $X = Y = [0, 1]$ , sei  $\lambda$  das Lebesguemaß auf  $X$  und  $\zeta$  das Zählmaß auf  $Y$ . Sei  $f$  die charakteristische Funktion der Diagonale  $\{(x, x) \mid x \in [0, 1]\} \subset X \times Y$ . Berechne

$$\int_X \left( \int_Y f(x, y) d\zeta \right) d\lambda \quad \text{und} \quad \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\lambda \right) d\zeta.$$

Wie verträgt sich das Ergebnis mit dem Satz von Fubini?

9. Zeige, da auf  $\mathbb{R}^n$  das Integral

$$\int_{|x| \leq c} |x|^\alpha dx, \quad c > 0,$$

genau dann endlich ist, wenn  $n + \alpha > 0$ , und berechne es.

10. Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ , sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $f|_A = 0$  für eine Teilmenge  $A \subset U$ . Zeige:

$$\int_A \partial f / \partial x_j dx = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

### Zu Kapitel V

1. Sei  $\mathcal{B}$  die Menge der Borel-meßbaren Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Zeige, daß  $\mathcal{B}$  die Mächtigkeit von  $\mathbb{R}$  hat; mit anderen Worten:  $\mathcal{B}$  läßt sich bijektiv auf  $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$  abbilden.
2. Sei  $C \subset [0, 1]$  die sogenannte **Cantor-Menge** der reellen Zahlen in deren Dezimalentwicklung nur die Ziffern 0 und 3 auftreten. Zeige:  $C$  ist kompakt; das Lebesguemaß  $\lambda_1(C)$  ist Null; es gibt eine stetige monotone Surjektion  $C \rightarrow [0, 1]$ . Folgere mit Aufg. 1: Es gibt Nullmengen in  $\mathbb{R}$ , die nicht Borel-meßbar sind.
3. Offenbar gibt es nach §1 in  $\mathbb{R}^2$  eine nicht Borel-meßbare Nullmenge, nämlich?
4. Sei  $C \subset \mathbb{R}$  kompakt und  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Zeige, daß sich  $f$  stetig auf  $\mathbb{R}$  fortsetzen läßt. Zeige mit Aufg. 2, daß es eine Nullmenge  $M$  in  $[0, 1]$  und eine stetige Abbildung  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  gibt, sodaß  $f(M)$  nicht Lebesgue-meßbar ist.
5. Sei  $I$  das Einheitsintervall. Zeige, daß es eine nicht integrierbare Funktion  $f : I \times I \rightarrow I$  gibt, für die das iterierte Integral

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$$

wohldefiniert und endlich ist. Man kann also den Satz von Fubini nicht umkehren.

6. Sei  $U$  nicht leer und offen in  $\mathbb{R}^{n+k}$  und  $k \geq 1$ . Zeige, daß eine stetig differenzierbare Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  nicht injektiv sein kann. (Tatsächlich gilt dasselbe für stetiges  $f$ ).
7. Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow U$  stetig differenzierbar, mit  $f \circ f = f$ . Zeige, daß es lokal um jeden Punkt  $p \in U$  eine stetig differenzierbare Koordinatentransformation  $\varphi : U \subset U_1 \xrightarrow{\cong} U'_1 \subset \mathbb{R}^n$  gibt, sodaß

$$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Beachte, daß hier im Bild- und Urbildraum die gleiche Transformation zu wählen ist.

**8.** Zeige, daß eine  $C^\infty$ -Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  nicht surjektiv sein kann.

**9.** Sei  $O(n)$  die Menge der orthogonalen Matrizen im Vektorraum  $V \cong \mathbb{R}^{n \times n}$  aller reellen  $(n \times n)$ -Matrizen. Zeige, daß  $O(n)$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $\frac{1}{2}n(n-1)$  von  $V$  ist.

Hinweis: Sei  $S$  der reelle Vektorraum der symmetrischen  $(n \times n)$ -Matrizen. Zeige, daß die Einheitsmatrix  $E \in S$  ein regulärer Wert der Abbildung  $V \rightarrow S$ ,  $x \mapsto {}^tXX$  ist.

Zeige, daß der Tangentialraum von  $O(n)$  am Punkt  $E$  der Vektorraum der schiefsymmetrischen reellen  $(n \times n)$ -Matrizen ist.

**10.** Sei  $\varphi : U \rightarrow V$  eine bijektive  $C^\infty$ -Abbildung offener Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  und sei  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  integrabel. Zeige, daß die Transformationsformel

$$\int_V f = \int_U f \circ \varphi \cdot |\det D\varphi|$$

immer noch gilt, auch wenn  $\varphi^{-1}$  nicht differenzierbar ist.

**11.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\infty$ -Funktion. Für  $a \in \mathbb{R}^n$  erkläre  $g_a : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $g_a(x) = f(x) + \langle a, x \rangle$ . Zeige, daß  $g_a$  für fast jedes  $a \in \mathbb{R}^n$  nur kritische Punkte mit nichtentarteter Hesseform hat.

**12.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion. Sei  $p \in U$  ein kritischer Punkt mit positiv definiten Hesseform. Zeige, daß für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  die Menge

$$D_\varepsilon = \{x \in U \mid f(x) - f(p) < \varepsilon\}$$

homöomorph zum  $n$ -Ball  $D^n = \{x \mid |x| \leq 1\}$  und ihr Rand homöomorph zu  $S^{n-1}$  ist.

**13.** Zeige, daß jede offene Überdeckung des  $\mathbb{R}^n$  eine abzählbare Teilüberdeckung enthält. Präzisiere und beweise die Aussage, daß eine lokal dünne Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  dünn ist.