Aufgaben

Schmeidige doch ein weniges deine borstige Seele!
Suche zusammen dein Wissen und lichte die rußigen Kammern
Deines Gehirns und besinne dich wohl auf alles und jedes,
Was dir geoffenbart; dann nimm den Griffel und zeichn es
Fein mit Fleiß in ein Buch, damit es daure und bleibe.

Möricke

Viele der folgenden Aufgaben enthalten eine Behauptung, die dann herausgefunden und bewiesen werden soll. Das wollte ich nicht immer in Befehlsform und in Nebensatzkonstruktionen aussprechen. Insbesondere widerstrebt es mir, meine geneigten Studierenden mit "man zeige" anzuherrschen.

Zu Kapitel I

1. Gib sämtliche Funktionen $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die die Differentialgleichung $y' = \sqrt{|y|}$ lösen.

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ eine monotone Funktion.

3. Wende das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf an, um eine Lösung der Differentialgleichung $y' = y - x$ mit Anfangsbedingung

(i) $y(0) = 1$, (ii) $y(0) = 0$ zu konstruieren.

4. Am Ende eines Hörsaals steht der Dozent mit Augenhöhe ℓ über dem Boden. Der Boden des Hörsaals soll so ansteigen, daß überall der Winkel zwischen dem Boden und der Geraden zum Auge des Dozenten konstant α ist, damit alle Hörer zum Dozenten im gleichen Winkel aufschauen. Beschreibe den Verlauf des Bodens durch eine Differentialgleichung in kartesischen und Polarkoordinaten und löse sie.

5. Gegeben sei eine differenzierbare Funktion einer Veränderlichen $t \mapsto y(t)$, und es sei $y(0) \geq 1$, $\dot{y}(t) \geq y(t)$. Dann ist $y(t) \geq \exp(t)$ für $t \geq 0$.

6. (i) Gib eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und ein Vektorfeld auf U ohne Singularitäten an, das zu jedem $\tau > 0$ eine Integralkurve der Periode τ hat.
(ii) Auf jeder offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt es einen Fluß $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U$, dessen Transformationen $\Phi_t : U \to U$ für $t \neq 0$ keinen Punkt festlassen.

7. Sei $f(y,t)$ eine formale Potenzreihe in zwei Variablen. Gesucht ist eine formale Potenzreihe $\alpha(t)$ einer Variablen mit $\alpha(0)=0$, sodaß

$$\dot{\alpha}(t) = f(\alpha(t),t).$$

Man erhält α durch Picard-Lindelöf Iteration. Die Iterationsfolge α_n konvergiert in dem Sinne, daß $\alpha_{n+1}-\alpha_n$ von n-ter Ordnung verschwindet.

8. Eine Schnecke kriecht ein beliebig dehnbares Gummiband entlang mit einer Geschwindigkeit v, während ein Dämon das Gummiband mit Geschwindigkeit w des Endpunktes, bei festem Anfangspunkt, ausdehnt. Beschreibe die Bewegung der Schnecke durch eine Differentialgleichung und entscheide (abhängig von v und w), ob sie in endlicher Zeit das Ende des Bandes erreicht.

9. Sei $D=\mathbb{R}_+$ und seien auf $\mathbb{R}\times D$ die Differentialgleichungen

$$\text{(i)}\;\; \dot{y} = \frac{y\cdot t}{y^2+t^2}\,, \qquad \text{(ii)}\;\; \dot{y} = \frac{t^2-y}{t}\,, \quad t\in D, \quad y\in\mathbb{R},$$

gegeben. Finde jeweils die lokalen Lösungen $\alpha(x,t)$ mit $\alpha(x,1)=x$.

10. Zum Zeitpunkt $t=0$ stehen drei Läufer auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Auf ein Kommando läuft jeder mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit auf seinen im Uhrzeigersinn nächsten Nachbarn zu. Dann gilt: Zu jeder Zeit $t\geq 0$ befinden sich die Läufer auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Beschreibe ihre Bahnen durch eine Differentialgleichung. Wie schnell nähern sie sich dem Mittelpunkt? Treffen sie sich?

11. (i) Löse die **Bernoullische Differentialgleichung** $\dot{y}=p(t)\cdot y+q(t)\cdot y^n$, $n\in\mathbb{Z}$, durch eine Transformation vom Typ $u=y^\alpha$.

(ii) Löse $\dot{y}=y/t+2y^2$ mit Anfang $y(1)=1$ und $y(1)=0$.

12. Die drei Vektorfelder mit den Phasenportraits am Ende von § 3 sind nicht durch lokale Transformation um den Mittelpunkt ineinander überführbar.

13. Sei U offen in $\mathbb{R}^2$ und $p\in U$ eine isolierte Singularität (= Nullstelle) des Vektorfeldes $v: U\to\mathbb{R}^2$. Der **Index** von v in p ist die Umlaufszahl $n(v\circ\alpha,0)$ für die Kurve $\alpha(t)=p+\varepsilon e^{2\pi i t}$, ε genügend klein. Konsultiere Lehrbücher der Funktionentheorie über die Definition und Eigenschaften der Umlaufszahl. Zeige:
Ist $\det(Dv(p))\neq 0$, so hat v in p denselben Index, wie das Vektorfeld $x\mapsto Dv(p)\cdot x$ am Ursprung, nämlich $\det(Dv(p))/|\det(Dv(p))|$.
Hinweis: Lokale Deformation von $v(x+p)$ in $Dv(p)\cdot x$.

14. Voraussetzungen und Erklärungen wie in 13. Sei p die einzige Singularität von v. Genau dann gibt es zu jeder Umgebung W von p ein Vektorfeld ohne Singularitäten auf U, das außerhalb W mit v übereinstimmt, wenn v den Index 0 in p hat. Der Index ist also das Hindernis für die Beseitigung einer Singularität durch lokale Änderung des Vektorfeldes. Es genügt, stetige Vektorfelder zu diskutieren.

15. Das Vektorfeld v auf $\mathbb{R}^2$ sei für $|x| \geq 1$ durch $v(x) = (0,1)$ gegeben, und es habe (für $|x| < 1$) nur isolierte Singularitäten. Dann verschwindet die Summe der Indexe der Singularitäten von v.

16. Das Vektorfeld v auf $\mathbb{R}^2$ habe S^1 als Orbit. Sei $|p| < 1$. Wie lange lebt die Integralkurve α_p durch p? Hat v eine Singularität p mit $|p| < 1$?

17. Sei v ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ mit $\langle v(x), x\rangle \geq |x|^3$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert keine Integralkurve $t \mapsto \alpha(t)$ durch einen Punkt $p \neq 0$ für alle $t > 0$.

18. Beschreibe die Lösungsschar der Ricattischen Differentialgleichung $y' = x - y^2$.

(i) Bestimme die Isoklinen $I(c) = \{(x,y) \mid y' = c\}$.

(ii) Jede Lösung trifft die Diagonale $\{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ in genau einem Punkt.

(iii) Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

  a) Lösungen $y(x)$ durch (t,t) mit $t > a$ schneiden die Isokline $I(0)$ und erfüllen $\sqrt{x} - y(x) \searrow 0$ für $x \to \infty$,

  b) Lösungen durch (t,t) mit $t < a$ gehen nach endlicher Zeit gegen $-\infty$.

(iv) Es gibt genau eine Lösung $y(x)$ mit $\sqrt{x} + y(x) \nearrow 0$ für $x \to \infty$, nämlich die durch (a,a).

Zu Kapitel II

1. Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve und $\alpha(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine stetige Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, sodaß α die Differentialgleichung $\dot{x} = A(t) \cdot x$ löst.

2. Die homogene lineare Differentialgleichung $\dot{y} = A(t) \cdot y$ hat genau dann eine Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ von unitären Matrizen, wenn $iA(t)$ für alle t hermitesch ist. Wie lautet die entsprechende Aussage für orthogonale $\Phi(t)$?

3. Berechne eine Fundamentalmatrix für die homogenen linearen Differentialgleichungen $\dot{y} = Ay$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{(ii)} \quad A = A(t) = \begin{pmatrix} -1 & t^{-1} \\ 1-t & 1 \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

Eine Lösung von (ii) ist eine Gerade.

4. Sei $\varphi : D \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Kurve und $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in D$. Gib eine Kurve $\psi : D \to \mathbb{R}^2$ an, sodaß $\varphi(t)$, $\psi(t)$, für jedes $t \in D$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden. Kann man auch in $\mathbb{R}^n$ stets k Kurven $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, die für jedes t linear unabhängig sind, durch $n-k$ weitere stetige Kurven zu einem System $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ergänzen, sodaß $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ für jedes t eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist?

5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und die Differentialgleichung $\ddot{y} = f(y, \dot{y})$ besitze eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $t \mapsto y(t)$, für die $\lim_{t\to\infty} y(t) = a$ existiert. Dann ist auch die konstante Funktion $y = a$ eine Lösung.

6. Löse

(i) $2t^2\ddot{y} - t\dot{y} - 2y = 0$.

(ii) $y^{[3]} - 4\ddot{y} + 5y - 2 = \sin t$.

(iii)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

7. Sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller komplexen Folgen $z = (z_k \mid k \in \mathbb{N}_0)$, und sei $\Gamma : V \to V$ der Shiftoperator $(\Gamma z)_k := z_{k+1}$. Sei $f \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad n. Die Gleichung für Folgen $z \in V$

$$(*) \qquad f(\Gamma)z = 0$$

heißt eine lineare homogene **Differenzengleichung** vom Grad n.

(i) Die sämtlichen Folgen, die $(*)$ erfüllen, bilden einen n-dimensionalen Unterraum L von V.

(ii) Ist $f(0) \neq 0$, so hat L eine Basis von Folgen $(k^j \cdot \lambda^k \mid k \in \mathbb{N}_0)$. Wie sind λ und j durch f bestimmt? Beschreibe auch im Falle, daß $f(0) = 0$ ist, eine Basis.

(iii) Die Funktion y löst genau dann die Differentialgleichung $f(d/dt)y = 0$, wenn y analytisch ist und die Folge $(y^{[k]}(0) \mid k \in \mathbb{N})$ die Gleichung $f(\Gamma)(y^{[k]}(0) \mid k \in \mathbb{N}_0) = 0$ löst.

(iv) Sei insbesondere die Folge $x = (x_k)$ erklärt durch

$$x_k = \sum_{j=1}^{k} j^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(\Gamma - 1)^{\alpha+2}x = 0$, und $x_k = \varphi(k)$ für ein Polynom φ vom Grad $\alpha + 1$.

8. Auf dem Phasenraum $U = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ der $(n \times n)$-Matrizen betrachte die autonome Differentialgleichung

$$\dot{Y} = Y^2 \quad \text{(Matrizenprodukt).}$$

Berechne die maximale Integralkurve $Y(t)$ mit $Y(0) = A$. Wie ist das Existenzintervall durch A bestimmt?

9. Sei D die Kugel vom Radius 1 um $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$ und v ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$, das außerhalb D die Hamiltonform $v = (\partial H/\partial y, -\partial H/\partial x)$ für eine C^2-Funktion $H(x,y)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus D$ hat. Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{div}_x v \, dx = 0.$$

Gibt es ein Vektorfeld v auf $\mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{div}_x v = 0$ für $|x| > 1$ und $\int \mathrm{div}_x v \, dx \neq 0$?

10. Reduktion nach d'Alembert. Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t) y^{[j]} = 0$$

und eine nicht triviale Lösung α. Der Ansatz $y(t) = z(t) \cdot \alpha(t)$ führt auf eine lineare Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung für $\dot{z}$.

Zu Kapitel III

1. Nach demselben Schema wie beim Morselemma folgt auch der Satz über die Umkehrabbildung mit Hilfe der Theorie der Integration von Vektorfeldern.

2. Sei $A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$. Untersuche das Konvergenzverhalten der Matrizenfolge $(A^k \mid k \in \mathbb{N})$ in Abhängigkeit von den Eigenwerten von A.

3. Sei M offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : M \to M$ stetig differenzierbar. Sei p ein Fixpunkt von f, also $f(p) = p$, und die Jacobimatrix $Df(p)$ habe nur Eigenwerte vom Betrag < 1. Dann enthält jede Umgebung von p eine Umgebung U mit folgender Eigenschaft: Ist $x \in U$, so ist $f^k(x) = f \circ \cdots \circ f(x) \in U$ und $\lim_{k\to\infty} f^k(x) = p$.

4. Unter welchen Bedingungen an die Eigenwerte von $A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ besitzt die autonome Differentialgleichung $\dot{y} = Ay$ nicht konstante erste Integrale $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$?

5. Warum besitzt jedes stetig differenzierbare Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n, n > 1$, in einer Umgebung eines nicht singulären Punktes stets nicht konstante erste Integrale?

6. Das stetig differenzierbare Vektorfeld v auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ besitze ein erstes Integral mit nirgends verschwindender Ableitung und eine periodische Lösung. Dann hat v viele periodische Lösungen. Gilt dieselbe Aussage auch für $U \subset \mathbb{R}^3$?

7. Die Summe und das Produkt erster Integrale von v sind auch erste Integrale von v.

8. Auf $U = \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}$ mit Koordinaten $(q_i, p_i \mid i = 1, \ldots, 3n)$ seien zwei C^2-Funktionen G, H gegeben. Bilde die zugehörigen Hamiltonschen Vektorfelder

$$v_G = (\partial G/\partial p_1, \ldots, \partial G/\partial p_{3n}, -\partial G/\partial q_1, \ldots, -\partial G/\partial q_{3n}),$$

und v_H entsprechend. Genau dann ist G ein erstes Integral von v_H, wenn H ein erstes Integral von v_G ist (**Noethers Theorem**).

9. In Aufgabe 8 gehöre zu dem Feld v_G der Fluß

$$\Phi_s : (q_j, p_j) \mapsto (q_j + s a_j, p_j), \quad a_j = a_{j+3},$$

für einen Einheitsvektor $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Daß H ein erstes Integral von v_G ist, heißt, daß H unter Translationen in Richtung a invariant ist. Was ist in diesem Fall G? Was bedeutet die Erhaltung von G unter dem Fluß von v_H physikalisch?

10. Löse (i) $y - xy' - (y')^2 = 0$, (ii) $y - xy' - ay' - b = 0$.
Ist die Enveloppe der Lösungsschar eine Lösung?

11. Löse $y - (y')^2 x - \log((y')^2) = 0$.

Zu Kapitel IV

1. Der Raum der stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall mit der Supremumsnorm-Topologie und der Raum der L^1-Funktionen auf dem Einheitsintervall mit der L^1-Norm-Topologie haben eine abzählbare Basis der Topologie. Wie steht es mit dem Raum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm-Topologie?

2. Führe im einzelnen aus, daß die Alexandroff-Kompaktifizierung X^∞ eines lokal kompakten Raumes X wohldefiniert und ein kompakter topologischer Raum ist.

3. Ist $f : X \to Y$ eine eigentliche stetige Abbildung lokal kompakter Räume und ist A in X abgeschlossen, so ist $f(A)$ in Y abgeschlossen.($\dim M > 2$).

4. Ist X lokal kompakt und $p \in X$, so enthält jede Umgebung von p eine kompakte Umgebung.

5. Ein lokal kompakter Raum mit abzählbarer Basis der Topologie besitzt eine kompakte Ausschöpfung.

6. Ein Unterraum eines lokal kompakten Raumes ist genau dann lokal kompakt, wenn er der Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge ist.

7. Die Menge der Nullstellen eines Polynoms $f \neq 0$ in n Unbestimmten im $\mathbb{R}^n$ hat das Maß Null.

8. Verklebt man zwei Mannigfaltigkeiten durch einen Homöomorphismus offener Teilmengen, so entsteht ein lokal euklidischer, also lokal zu einem $\mathbb{R}^n$ homöomorpher Raum.

9. Konstruiere einen lokal euklidischen Raum, der nicht hausdorffsch ist. Allgemeiner: Die drei Eigenschaften eines Raumes, eine abzählbare Basis zu haben, hausdorffsch oder lokal euklidisch zu sein, sind unabhängig.

10. Sei $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Kreisscheibe und $L = D \setminus \{0\}$ die gelochte offene Kreisscheibe. Dann ist die Einpunktkompaktifizierung D^∞ eine Mannigfaltigkeit (welche?), L^∞ aber nicht.

11. Sei $L = (\mathbb{R}_+ \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}_+) \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Führe eine differenzierbare Struktur einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit auf L so ein, daß die Inklusion $L \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^∞-Abbildung wird.

12. Der Ring $\mathcal{E}_n$ der Keime von C^∞-Funktionen $(\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$ besitzt genau ein maximales, aber für $n > 0$ viele Primideale. Zur Angabe von nicht maximalen Primidealen wollen wir aber $n > 1$ annehmen, sonst bräuchte man mehr Mengenlehre, als ich erklärt habe (Ultrafilter).

13. Sei S der reelle Vektorraum der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen. Man hat eine Einbettung $\mathbb{R}P^{n-1} \to S$, die $[\,x\,]$ auf die Orthogonalprojektion von $\mathbb{R}^n$ auf die durch $[\,x\,]$ bestimmte Gerade abbildet.

14. Die reellen $(n \times n)$-Matrizen vom Rang r bilden eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Was ist ihre Dimension?

15. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\varepsilon : M \to \mathbb{R}_+$ eine überall echt positive stetige Funktion. Sei $f : M \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gibt es eine C^∞-Funktion $g : M \to \mathbb{R}^n$ mit $|g - f| < \varepsilon$. Ist f schon C^∞ in einer Umgebung einer abgeschlossenen Teilmenge A von M, so kann man $g|A = f|A$ wählen. Hinweis: Lokal kann man f konstant approximieren.

16. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $\varepsilon : M \times N \to \mathbb{R}_+$ stetig und überall echt positiv. Sei $f : M \times N \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es Familien von C^∞-Funktionen $\varphi_\lambda : M \to \mathbb{R}$ und $\psi_\lambda : N \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda$, sodaß die Familie der Produkte

$$\varphi_\lambda \cdot \psi_\lambda : M \times N \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \varphi_\lambda(x) \cdot \psi_\lambda(y)$$

lokal endlich ist und

$$|f - \sum_\lambda \varphi_\lambda \cdot \psi_\lambda| < \varepsilon.$$

17. Mit Aufgabe 16 übertrage den Approximationssatz von Weierstraß von Intervallen auf Quader in $\mathbb{R}^n$.

18. Ist A eine abgeschlossene Teilmenge einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, so gibt es eine C^∞-Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, die genau auf A verschwindet. Ist $M = \mathbb{R}^n$, so kann man f als Grenzfunktion einer überall samt allen Ableitungen normal konvergenten Reihe $f = \sum_{j=1}^\infty f_j$ von Funktionen f_j mit Trägern in Kugeln in $\mathbb{R}^n \setminus A$ konstruieren.

19. Sind A und B zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, so gibt es eine C^∞-Funktion $f : M \to [0, 1]$ mit $f|A = 0$ und $f|B = 1$.

20. Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gibt es eine eigentliche C^∞-Funktion $f : M \to \mathbb{R}$.

21. Eine nicht leere kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit läßt sich nicht in einen euklidischen Raum gleicher Dimension einbetten.

22. $H(m, n) = \{([x], [y]) \in \mathbb{R}P^m \times \mathbb{R}P^n \mid \sum_{j=0}^m x_j y_j = 0\}$, $m \le n$, ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}P^m \times \mathbb{R}P^n$. Dies sind die **Milnormannigfaltigkeiten**.

23. Die Abbildung $f : \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^3$, $f([x, y], [z, t]) = [xz, xt, yz, yt]$ definiert einen Diffeomorphismus von $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ mit der projektiven Quadrik $\{[u_0, u_1, u_2, u_3] \mid u_0 u_3 - u_1 u_2 = 0\}$.

Zu Kapitel V

1. Die Form $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 \in \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^4)$ ist nicht zerlegbar.

2. Jede alternierende 2-Form läßt sich durch Basiswechsel auf die Gestalt $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{2k-1} \wedge \varepsilon_{2k}$ transformieren. Dies kann man auch als Satz über schiefsymmetrische Matrizen ansehen.

3. Die zerlegbaren alternierenden Zweiformen auf $\mathbb{R}^4$ bilden eine reguläre Quadrik, nämlich die Nullstellenmenge der nicht entarteten quadratischen Form

$$\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^4) \to \mathrm{Alt}^4(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \alpha \wedge \alpha.$$

4. Jede Form in $\mathrm{Alt}^k \mathbb{R}^3$ ist zerlegbar.

5. Die Formen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathrm{Alt}^1 V = V^*$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = 0$.

6. Auf der Menge $\Gamma^k(V)$ der zerlegbaren alternierenden k-Formen $\neq 0$ auf V operiert die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ durch Multiplikation. Sei $G^k(V) = \Gamma^k(V)/\mathbb{R}^\times$. Man hat eine Bijektion zwischen $G^k(V)$ und der **Graßmannmannigfaltigkeit** der k-dimensionalen Unterräume von V^*, die einer zerlegbaren Form $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ das Erzeugnis von $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ in V^* zuordnet.

7. Seien M und N orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Beschreibe eine induzierte Orientierung von $M \times N$. Ist umgekehrt $M \times N$ orientierbar und nicht leer, so sind M und N beide orientierbar.

8. Eine nicht orientierbare **Fläche** (= 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit) enthält ein Möbiusband.

9. Auf dem Torus $T = S^1 \times S^1$ hat man die Involution

$$\tau : T \to T, \quad (z, w) \mapsto (-z, w^{-1}).$$

Der Quotientenraum T/τ, der durch Identifikation von p mit $\tau(p)$ für alle $p \in T$ entsteht, hat genau eine Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, für die die Projektion $T \to T/\tau$ differenzierbar vom Rang 2 ist. Die Fläche T/τ heißt **Kleinsche Flasche**. Ist sie orientierbar? Zeichne eine Immersion der Kleinschen Flasche in den $\mathbb{R}^3$.

10. Bilde den Quotientenraum von S^1 nach der Äquivalenzrelation $(x, y) \sim (-x, y)$. Entsteht eine Mannigfaltigkeit?

11. Bilde den Quotientenraum von S^2 nach der Äquivalenzrelation $(x, y, z) \sim (-x, -y, z)$. Entsteht eine Mannigfaltigkeit?

12. Sei M offen in $\mathbb{R}^n$ und $B = \overline{M} \setminus M$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $M \cup B$ eine berandete n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Ist notwendig $B = \partial(M \cup B)$?

13. Ist α eine geschlossene und β eine exakte alternierende Differentialform, so ist $\alpha \wedge \beta$ exakt.

14. Jede Differentialform in $\Omega^n \mathbb{R}^n$ ist exakt.

15. Ein **integrierender Faktor** einer Pfaffschen Form α ist eine Funktion f ohne Nullstellen, sodaß $f \cdot \alpha$ geschlossen ist. Hat α einen integrierenden C^1-Faktor, so ist $\alpha \wedge d\alpha = 0$. Finde eine Pfaffsche Form ohne integrierenden Faktor.

16. Seien $u, v, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Berechne

$$d(u\, dy \wedge dz + v\, dz \wedge dx + w\, dx \wedge dy) = (?) \cdot dx \wedge dy \wedge dz.$$

17. Seien α und β stetig differenzierbare Differentialformen von geradem Grad. Berechne die äußere Ableitung von

(i) $d\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d\beta$,

(ii) $d\alpha \wedge \beta \wedge \gamma + \alpha \wedge d\beta \wedge \gamma + \alpha \wedge \beta \wedge d\gamma$.

18. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ Pfaffsche Formen, die $\Omega^1 M$ als $C^\infty(M)$-Modul erzeugen, und sei $\varphi \in \Omega^k M$ mit $k < \dim M$. (Alle Formen seien hier C^∞.) Ist dann $\varphi \wedge \alpha_j = 0$ für $j = 1, \ldots, m$, so ist $\varphi = 0$. Sei nun β eine alternierende Differentialform auf M mit $d\alpha_j = \beta \wedge \alpha_j$ für $j = 1, \ldots, m$. Dann ist β geschlossen.

19. Auf der Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hat man die Volumenform ω mit

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_n) = \det(x, v_1, \ldots, v_n).$$

Berechne $\omega_x = (?) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ in der durch die Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ auf die ersten n Komponenten definierten Karte auf der oberen Halbsphäre.

20. Gegebenheiten wie in Aufgabe 19. Berechne ω_x in der Karte, die durch stereographische Projektion vom Nordpol $N = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$ aus auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist.

21. Sei $p : S^n \to \mathbb{R}^n$ die Projektion $p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$. Berechne

$$\int_{S^n} p^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n).$$

Zu Kapitel VI

Eine kompakte berandete zusammenhängende n-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ nennt man auch ein **glatt berandetes Gebiet** in $\mathbb{R}^n$. Bei Randpunkten $p \in \partial M$ hat man dann Karten $h : (\mathbb{R}^n, p) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ von $\mathbb{R}^n$, mit $h : (M, p) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^n_-, 0)$.

1. Ist M ein glatt berandetes Gebiet der Ebene, so ist

$$\mathrm{vol}(M) = \int_{\partial M} x\, dy = -\int_{\partial M} y\, dx.$$

Wie ist dies als Integral einer Variablen zu schreiben, wenn $\gamma : [0,1] \to \partial M$ eine Parametrisierung des Randes ∂M als geschlossene Kurve ist?

2. Sei M ein glatt berandetes Gebiet in $\mathbb{C}$. Berechne $\int_{\partial M} \bar{z}\, dz$.

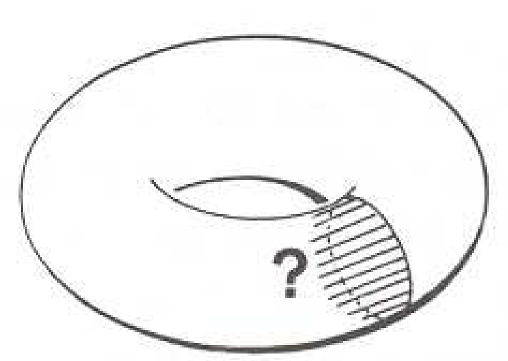
3. Sei M ein glatt berandetes Gebiet in $\mathbb{C}$, und sei $f : M \to \mathbb{C}$, als reelle Abbildung $M \to \mathbb{R}^2$ betrachtet, stetig differenzierbar. Dann gilt für $z \in M \smallsetminus \partial M$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{M} \frac{\partial f / \partial \bar{\zeta}}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

4. Die Relation "C^k-homotop" ist eine Äquivalenzrelation für C^k-Abbildungen $M \to N$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

5. Seien M und N orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten gleicher positiver Dimension, und M sei kompakt. Sei $f : M \to N$ stetig differenzierbar mit einem regulären Wert, der ungerade viele Urbildpunkte hat. Dann ist f nicht homotop zu einer konstanten Abbildung.

6. Kann der Kreis $S^1 \times \{0\}$ im Torus $S^1 \times S^1$ Urbild eines regulären Wertes einer stetig differenzierbaren Funktion $S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$ sein? Berandet dieser Kreis eine kompakte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im Torus?



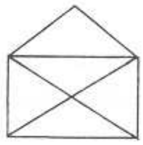
7. Der Satz vom Igel gilt auch für stetige statt C^1-Vektorfelder.

8. Brouwers Fixpunktsatz gilt auch für stetige statt C^1-Abbildungen.

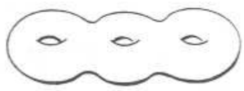
9. Ein Raum X hat die Fixpunkteigenschaft **F**, wenn gilt: Jede stetige Abbildung $f : X \to X$ hat einen Fixpunkt. Wie wir wissen hat D^n die **F**. Hat X die **F** und ist $A \subset X$ ein Retrakt, d.h. hat man eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r|A = \mathrm{id}_A$, so hat A die **F**. Welche der folgenden Räume haben die **F**?

(i) Der Graph

(ii) Der Graph



(iii) Die Fläche vom Geschlecht 3



(iv) Die Kugel mit 3 Haaren

10. Sei $\cdots \to A^{j-1} \underset{d}{\to} A^j \underset{d}{\to} A^{j+1} \to \cdots$ ein exakter Kettenkomplex von (endlichdimensionalen) Vektorräumen. Dann gibt es eine Kettenhomotopie K, also lineare Abbildungen $K^j : A^j \to A^{j-1}$, mit $\mathrm{id} = Kd + dK$.
Hinweis: $A^j = B^j \oplus B^{j+1}$, mit $B^j = d(A^{j-1})$.

11. Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit besitzt eine Riemannsche Metrik. Hinweis: Partitionen der Eins.

12. Die Sphäre S^4 besitzt keine Lorentz-Metrik, also keine symmetrische Bilinearform auf dem Tangentialbündel mit stetig vom Punkt abhängender Fundamentalmatrix (g_{ij}), die an jeder Stelle die Normalform der Minkowski-Metrik hat. Hinweis: Sonst fände man ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf S^4.

13. Sei M eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\alpha \in \Omega^{n-1}M$ eine stetig differenzierbare Differentialform. Sei K eine kompakte Teilmenge von M. Dann ist $\int_K d\alpha$ durch $\alpha|(K \setminus \overset{\circ}{K})$ bestimmt.

14. Guldinsche Regel. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine überall echt positive stetig differenzierbare Funktion. Der Graph von f in der (x,y)-Ebene rotiere um die x-Achse in $\mathbb{R}^3$. Dann hat die entstehende Rotationsfläche den Flächeninhalt

$$2\pi \int_a^b f(t) \cdot \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

Das Integral ist die Länge der Kurve mal Abstand des Schwerpunkts der Kurve von der Roationsachse — warum? Wie lautet die Verallgemeinerung auf höhere Dimension?

15. Gilt die Formel $\det(\mathrm{id} + (f_i \cdot f_j)) = 1 + f_1^2 + \cdots + f_n^2$ für Matrizen über beliebigen Körpern?

16. Berechne die Oberfläche des Teils des hyperbolischen Paraboloids

$$x^2 - y^2 - 2az = 0, \quad a > 0,$$

dessen orthogonale Projektion auf die (x, y)-Ebene das Innere der Kurve $r^2 = a^2 \cos\varphi$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, bildet.

17. Sei $f : S^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_3^4 + x_2 \sin(x_1 x_2) + x_3 \tan(x_1 \cos x_2).$$

Berechne $\int_{S^2} f$.

18. Berechne die Divergenz des Vektorfeldes $v = r \cdot {}^t(x, y, z)$, mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, auf $\mathbb{R}^3$. Sei $K(a)$ die Kugel vom Radius a um den Ursprung in $\mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\int\limits_{K(a)} r = \pi a^4.$$

19. Betrachte die Funktion $\varphi : T = S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^4$ auf dem Torus, mit

$$\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2) = (\cos\vartheta_1,\ \sin\vartheta_1,\ 2\cos\vartheta_2,\ 2\sin\vartheta_2), \quad 0 \leq \vartheta_1, \vartheta_2 \leq 2\pi.$$

(i) Die Abbildung φ ist eine Einbettung.
(ii) Berechne den metrischen Fundamentaltensor der Metrik auf T, die durch φ von der Metrik auf $\mathbb{R}^4$ induziert ist, in Koordinaten $(\vartheta_1, \vartheta_2)$.
(iii) Berechne das Volumen von T für diese Metrik.

20. Sei $Z = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $P = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z\}$. Berechne die Oberfläche von $P \cap Z$. In der Sphäre $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \bigm| |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ liegt die Teilmenge $V = \{(z_1, z_2) \in S^3 \bigm| |z_1|^2 \leq 1/2\}$. Dies ist ein Volltorus mit einem Torus $T \subset S^3$ als Rand. Berechne die Volumina von T und V.

21. Eine C^2-Funktion f auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit heißt **harmonisch**, wenn $\Delta f = 0$. Sei nun M offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$ harmonisch, und sei $p \in M$. Dann hängt das Integral von f über Sphären in M um p für kleine Radien nicht vom Radius der Sphären ab. Hinweis: Integralsatz. Also hat f die **Mittelwerteigenschaft:** Es ist $f(p)$ der Mittelwert von f über jedes Sphäre in M um p von genügend kleinem Radius. Wie klein? Was sagt die Aussage in Formeln?

22. Sei M offen in $\mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit der Mittelwerteigenschaft (Aufgabe 21) ist C^∞. Hinweis: Sei σ eine um 0 rotationssymmetrische C^∞-Glockenfunktion mit kompaktem Träger in M und Integral 1, dann ist

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\sigma(y - x)\, dy.$$

23. Sei M offen in $\mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit der Mittelwerteigenschaft ist harmonisch. Hinweis: Aufgabe 22, angenommen $\Delta f(x) > 0 \ldots$.

24. Maximumsprinzip. Eine nicht konstante harmonische Funktion auf einer zusammenhängenden offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ nimmt in M kein Extremum an. Ist die Funktion also auf $\overline{M}$ noch stetig und M beschränkt, so ist die Funktion durch ihre Werte auf dem Rand $\overline{M} \setminus M$ bestimmt.

25. Die Funktion $f(x) = a/|x|$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist harmonisch, und für jede kompakte berandete 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^3$ mit $0 \in M$ ist

$$\int_{\partial M} \langle \operatorname{grad} f, \mathfrak{n} \rangle = -4\pi a.$$