A n h a n g zu Kapitel II.

§ 8. Lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten

Wir betrachten auf $U = \mathbb{C}^n$ eine lineare Differentialgleichung

(8.1) $$\dot{x} = A(t) \cdot x, \quad A : \mathbb{R} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U), \quad A(t+\omega) = A(t)$$

für ein $\omega > 0$.

(8.2) Satz. *Ist Φ eine Fundamentalmatrix von (8.1), so auch Ψ mit $\Psi(t) = \Phi(t+\omega)$. Für jede Fundamentalmatrix Φ existiert eine ω-periodische nicht singuläre Matrix $P(t)$ und eine konstante Matrix R, sodaß*

$$\Phi(t) = P(t) \cdot e^{tR}.$$

Beweis: Aus $\dot{\Phi}(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$ folgt durch Einsetzen von $t+\omega$ für t:

$$\dot{\Phi}(t+\omega) = A(t+\omega) \cdot \Phi(t+\omega), \quad \text{d.h. } \Psi(t) = A(t) \cdot \Psi(t),$$

weil $A(t+\omega) = A(t)$. Das zeigt das erste. Folglich ist

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t) \cdot C$$

für eine reguläre konstante Matrix C. Zu C gibt es eine konstante Matrix R, sodaß

(8.3) $$C = e^{\omega R}$$

wie wir gleich zeigen. Also $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)e^{\omega R}$. Definiere $P(t)$ durch

$$P(t) = \Phi(t) \cdot e^{-tR}.$$

Dann ist $P(t+\omega) = \Phi(t+\omega)e^{-\omega R}e^{-tR} = \Phi(t)e^{-tR} = P(t)$, und $P(t)e^{tR} = \Phi(t)$. □

Beweis (8.3): Wir wollen setzen:

$$\omega R = \log C,$$

also $R = \omega^{-1} \log C$. Wie definiert man $\log C$, sodaß$e^{\log C} = C$? Nun, man hat die Jordan-Chevalley-Zerlegung

$$C = D \cdot N, \quad DN = ND,$$

D halbeinfach, N unipotent.
Man setzt
$$\log C = \log(D \cdot N) = \log D + \log N,$$
wobei zu beachten bleibt, daß $\log D$ und $\log N$ so bestimmt werden, daß sie auch vertauschbar sind: $(\log D)(\log N) = (\log N) \cdot (\log D)$. Ist dann $e^{\log D} = D$, $e^{\log N} = N$, so ist $e^{\log D + \log N} = e^{\log D} \cdot e^{\log N} = DN$. Bleiben also $\log D$ und $\log N$ zu definieren. Nun zu D: Für geeignete Basis ist $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, und damit $\log D = \mathrm{Diag}(\log \lambda_1, \ldots, \log \lambda_n)$, was man hier geeignet wählen kann, weil alle $\lambda_j \neq 0$. Zu $\log N$: Hier hilft die Potenzreihe
$$\log(1+z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-)^{j+1} z^j / j.$$
Wir schreiben die unipotente Matrix $N = \mathbb{1} + \widetilde{N}$, $\widetilde{N}$ nilpotent, und setzen
$$\log N = \log(\mathbb{1} + \widetilde{N}) := \sum_{j=1}^{n} (-)^{j+1} j^{-1} \widetilde{N}^j.$$
Die formale Identität von Potenzreihen $\exp(\log(1+z)) = 1+z$ bleibt erhalten beim Einsetzen von $\widetilde{N}$ für z und liefert
$$\exp\log(N) = \exp\log(\mathbb{1} + \widetilde{N}) = 1 + \widetilde{N} = N.$$
Weil D mit N, also mit $\widetilde{N}$ vertauschbar ist, ist auch $\log D$ mit $\log(\mathbb{1} + \widetilde{N})$ vertauschbar, wie die (endliche) Reihe zeigt. $\square$

Explizit ist also $C = \Phi(t)^{-1}\Phi(t+\omega) = \Phi^{-1}(0)\Phi(\omega)$, und $R = \omega^{-1} \log C$. So ist R aus $\Phi(0)$ und $\Phi(\omega)$ berechenbar. Die Matrix
$$P(t) = \Phi(t) e^{-tR}$$
ist aus $\Phi \mid [\,0, \omega\,]$ berechenbar, weil sie ω-periodisch ist. Zusammen also liefert der Satz eine Berechnung von Φ aus $\Phi \mid [\,0, \omega\,]$.
Ist Φ_1 eine andere Fundamentalmatrix, so hat man eine konstante Transformation T mit
$$\Phi_1 = \Phi \cdot T,$$
Also
$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= (P(t) \cdot T) \cdot (T^{-1} e^{tR} T) \\ &= (P(t) \cdot T) \cdot e^{tR_1}, \quad R_1 = T^{-1} R T.\end{aligned}$$
Der periodische Faktor ist also $P \cdot T$, der Exponentialfaktor e^{tR_1}, und in der Tat: Der Exponentialfaktor $e^{\omega} R = \Phi(0)^{-1}\Phi(\omega)$ ist durch Φ bestimmt. Man sieht, daß er bis auf Konjugation bestimmt ist.

Das sagt allerdings nicht, daß R durch die Differentialgleichung bestimmt ist. Weil $e^{\omega(2\pi i k/\omega)} = 1$, hat man halbeinfache Matrizen D mit Eigenwerten $2\pi i k/\omega$, sodaß $e^{\omega D} = \mathrm{id}$. Damit ist e^{tD} dann ω-periodisch, und zu der Zerlegung $\Phi(t) = P(t) e^{tR}$ erhält man

die neue Zerlegung $\Phi(t) = (P(t)e^{-td}) \cdot e^{t(D+R)}$, falls $DR = RD$. Die Eigenwerte von $C = e^{\omega R}$ heißen die **Multiplikatoren** von A und ihre Logarithmen, die Eigenwerte von R, heißen die **charakteristischen Exponenten** von A. Sie sind natürlich nur bis auf $2\pi i\,\mathbb{Z}$ bestimmt.
Ist A reell und wählt man auch Φ reell, so braucht $C = \Phi^{-1}(0)\Phi(\omega)$ keinen reellen Logarithmus zu haben. Schwierigkeiten machen die Summanden der reellen Jordanzerlegung von der Gestalt $D_\lambda N_\lambda$ mit $\lambda < 0$. Aber dann hat $D_\lambda^2 N_\lambda^2 = D_{\lambda^2} \cdot N_\lambda^2$ positive Eigenwerte. Also C^2 hat stets einen reellen Logarithmus. Daher erhält man eine reelle Zerlegung $\Phi = P \cdot e^{tR}$ mit reellen Faktoren und 2ω-periodischer Matrix P.

§ 9. Lineare Differentialgleichungen mit isolierten Singularitäten

Wir betrachten lineare Differentialgleichungen im Komplexen

$$w' = A(z) \cdot w, \quad A : U \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \quad \text{holomorph.} \tag{9.1}$$

Dabei ist U offen in $\mathbb{C}$ und es ist gemeint, daß alle Komponenten a_{ij} von A auf U holomorphe Funktionen sind. Ist K eine Kreisscheibe in U oder allgemeiner eine einfach zusammenhängende offene Menge, so kann man wie früher erwähnt eine Fundamentalmatrix $\Phi(z)$ auf K durch das Picard-Lindelöf-Verfahren gewinnen. Wir haben es in den Übungen explizit aufgeschrieben, alle Terme der Reihenentwicklung werden durch Integration gewonnen, die man in K eindeutig und wegunabhängig ausführen kann. Ist aber das Gebiet U nun nicht einfach zusammenhängend, und geht man von einem Kreis $K \subset U$ und einem Fundamentalsystem Φ auf K aus, so kann man entlang eines Weges, der in K beginnt und endet, auf einer Folge von Kreisscheiben K_j jeweils Fundamentalsysteme Φ_j definieren, und zwar so, daß $\Phi_{j-1} = \Phi_j$ auf $K_{j-1} \cap K_j$, denn zwei Fundamentalsysteme auf $K_{j-1} \cap K_j$ unterscheiden sich um eine konstante Matrix: $\Phi_j = \Phi_{j-1}T$, und man kann ja Φ_j durch $\Phi_j T^{-1}$ ersetzen.

Bild

So setzt man $\Phi|K$ von Kreis zu Kreis fort und landet schließlich wieder bei einer Fundamentalmatrix auf K. Dies ist aber im allgemeinen (wenn man ein Loch in U umläuft) nicht mehr Φ, sondern eine andere Fundamentalmatrix, also $\Phi \cdot C$ für eine konstante reguläre Matrix C. Diese Matrix C ist die dem Weg zugeordnete **Monodromie**. Die Rechnung

$$\Phi CT = (\Phi T)(T^{-1}CT)$$

zeigt, daß ein anderes Fundamentalsystem ΦT mit Fortsetzungen $\Phi_j T$ und Ende ΦCT die Monodromie $T^{-1}CT$ hat. Die Monodromie ist also bis auf Konjugation bestimmt.

Wir wollen diese Situation jetzt näher in der Umgebung einer isolierten Singularität von $A(z)$ studieren. Wir verschieben die Koordinate so, daß die Singularität am Ursprung ist, und nehmen also an, daß A holomorph ist auf $\{z \mid 0 < |z| < a\}$ für ein $a > 0$. Man kann dann das Fortsetzen eines Fundamentalsystems beim Umlaufen des Ursprungs so beschreiben: Wir setzen

$$z = e^u, \quad Re(u) < \log(a) =: \tilde{a}$$

und setzen $v(u) = w(e^u)$. Dann haben wir

$$v'(u) = \frac{d}{du} w(e^u) = w'(e^u) \cdot e^u = e^u \cdot A(e^u) \cdot w(e^u),$$

also

$$v'(u) = \widetilde{A}(u) \cdot v(u), \quad \widetilde{A}(u + 2\pi i) = \widetilde{A}(u) \tag{9.2}$$

$\widetilde{A}(u) := e^u \cdot A(e^u)$. Damit ist uns in (9.2) auf dem einfach zusammenhängenden Streifen $\{Re(u) < \tilde{a}\}$ eine $(2\pi i)$-periodische holomorphe lineare Differentialgleichung gegeben.

(9.3) Satz. *Jede (mehrdeutige) Fundamentalmatrix von (9.1) hat die Form*

$$\Phi(z) = S(z) \cdot z^R,$$

wobei $S(z)$ analytisch ist für $0 < |z| < a$, und R eine konstante Matrix ist. Es ist $z^R := e^{\log(z) \cdot R}$.
Die Mehrdeutigkeit von Φ beim Umlaufen des Ursprungs steckt in der Mehrdeutigkeit der Funktion $\log(z)$.

Beweis: Dies ist unsere Wissenschaft von den periodischen linearen Differentialgleichungen, angewandt auf die Gleichung (9.2) und den $(2\pi i)$-invarianten Streifen $\{Re(u) < \tilde{a}\}$. Wir können das dort erzielte Resultat hier ohne weiteres anwenden, wer es nicht glaubt, kann es Schritt für Schritt nocheinmal bestätigen. Es sagt, daß eine Fundamentalmatrix $\Psi(u)$ der Gleichung (9.2) die Gestalt hat:

$$\Psi(u) = P(u) \cdot e^{uR}, \quad P(u + 2\pi i) = P(u),$$

mit $\Psi(u_o)^{-1}\Psi(u_0 + 2\pi i) = e^{2\pi i R}$ für jedes u_0 mit $Re(u_0) < \tilde{a}$. Zu einer Fundamentalmatrix $\Phi(z)$ von (9.1) kommt man, indem man $e^u = z$ substituiert, also $u = \log(z)$. Weil $P(u)$ hier $(2\pi i)$-periodisch ist, wird durch $S(z) := P(\log(z))$ eine eindeutige Funktion definiert, denn $\log(z)$ ist bis auf Addition von $2\pi i k$ bestimmt. Es ergibt sich also

$$\Phi(z) := \Psi(\log(z)) = P(\log(z)) \cdot e^{\log(z) \cdot R} = S(z) \cdot z^R. \qquad \square$$

Hat man eine Fundamentalmatrix Φ so beschrieben, so wird eine beliebige andere für eine konstante reguläre Matrix T durch $\Phi \cdot T$ gegeben, also durch $\Phi T = (ST) \cdot (T^{-1} z^R T) =$

$ST \cdot z^{T^{-1}RT}$, denn $T^{-1}z^R T = T^{-1}e^{\log(z)\cdot R}T = e^{\log(z)\cdot T^{-1}RT} = z^{T^{-1}RT}$. Man kann nun T so wählen, daß $T^{-1}RT$ Jordansche Normalform hat, also bei geeigneter Wahl von Φ ist.

$$R = D + N,\ D \text{ halbeinfach},\ N \text{ nilpotent},\ DN = ND,$$

und es ist

$$z^R = z^D \cdot z^N, \quad D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$
$$z^D = \mathrm{Diag}(z^{\lambda_1}, \ldots, z^{\lambda_n}), \quad z^N = e^{\log(z)\cdot N} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\log(z)^j}{j!} N^j.$$

Das kann man für die Standardform von N, wie früher geübt, leicht explizit in Matrizen hinschreiben.

Soweit wissen wir nichts über das Verhalten von $S(z)$ für $z \to 0$, und hier beginnt ein subtiles Studium. Angenommen

$$w' = A(z) \cdot w, \quad A(z) = z^{-\mu} B(z)$$

für eine lokal um 0 analytische Matrix B, so sagen wir, A hat einen Pol der Ordnung μ. Ist $\mu = 0$, so ist A analytisch auch bei 0 und man hat eine eindeutig definierte analytische Lösungsmatrix, also $R = 0$. Es ist nun ein großer Unterschied für $\mu = 1$ (Singularität erster Art) und $\mu > 1$ (Singularität zweiter Art). Man nennt 0 einen **regulär singulären Punkt**, wenn $S(z)$ bei 0 höchstens einen Pol hat, also $z^k S(z)$ analytische Koeffizienten hat für genügend großes k.

(9.4) Satz. *Ist* 0 *eine Singularität erster Art, also* $w' = z^{-1}A(z)w$ *für eine auf* $\{|z| < a\}$ *analytische Matrix* A, *so ist* 0 *ein regulär singularer Punkt, also die Matrix* $S(z)$ *hat einen Pol bei* 0.

Beweis: Die bewährte Transformation $z = e^u$ bringt die gegebene Gleichung auf die Form

$$v'(u) = A(e^u) \cdot v(u), \quad v(u) = w(e^u). \tag{9.5}$$

Wir interessieren uns für diese Differentialgleichung auf einem Halbraum $\{Re(u) < b\}$. Weil A bei 0 analytisch ist, bleibt $A(e^u)$ auf dem Halbraum, wenn wir etwa b noch etwas verkleinern, beschränkt, also $|A| \le d$. Wir wollen zeigen, daß für eine Fundamentalmatrix Φ von $w' = z^{-1}Aw$ die Matrix $z^k S(z)$ für genügend große k beschränkt bleibt, und schätzen daher eine Lösung v von (9.5) für $z \to 0$, also für kleinen Realteil von u ab. Schreibe dazu

$$u = iy - x, \quad r(x,y) = |v(iy - x)|,$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial r/\partial x = \partial |v|/\partial x &\le |v'(iy - x)| = |A \cdot v(iy - x)| \\ &\le d \cdot r(x,y), \end{aligned}$$

woraus nach dem Vergleichssatz folgt:

$$r(iy - x) \leq c(y) \cdot e^{dx} \quad \text{für} \quad x > x_0.$$

Dabei muß man $c(y)$ so wählen, daß die Ungleichung für $x = x_0$ stimmt, also $c(y) = r(iy - x_0) \cdot e^{-dx_0}$. Es kommt hier nur darauf an, daß $c(y)$ bezüglich y abzuschätzen ist. Sei

$$C = \max\{c(y) \mid 0 \leq y \leq 2\pi\},$$

dann ist also

$$|w(z)| = |v(u)| = r(iy - x) \leq c \cdot e^{dx} = c \cdot e^{-d \ \log|z|} = c \cdot |z|^{-d}.$$

Das zeigt: Ist Φ eine Fundamentalmatrix von $w' = z^{-1}A(z)w$, so ist auf $\{z = iy - x \mid 0 \leq y < 2\pi, x \geq x_0\}$

$$|\Phi(z)| \leq C \cdot |z|^{-d}.$$

Damit ist es schon fast geschafft. Man muß noch das z^{-R} in der Darstellung $S(z) = \Phi(z) \cdot z^{-R}$ abschätzen. Nun: $z^{-R} = e^{-\log(z)R} = e^{-\log\ \rho \cdot R} \cdot e^{-i\vartheta R}$ für $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$. Daher $|z^{-R}| \leq |e^{-\log\ \rho \cdot R}| \cdot |e^{i\vartheta R}|$. Nun: $|e^{-\log\ \rho \cdot R}| \leq e^{-\log\ \rho \cdot |R|} = \rho^{-|R|}$ für $0 < \rho < 1$, und ebenso: $|e^{i\vartheta R}| \leq e^{2\pi|R|}$. Zusammen ergibt sich: $|z^{-R}| \leq \rho^{-|R|} \cdot e^{2\pi|R|}$ für $0 < \rho < 1$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Damit haben wir

$$|S(z) \leq |\Phi(z)| \cdot |z^{-R}| \leq \tilde{c} \cdot |z|^{-(d+|R|)}$$

für eine Konstante $\tilde{c}$, was zeigt, daß $z^k\ S(z)$ beschränkt bleibt für $k \geq d + |R|$, also daß S bei 0 einen Pol hat. □

Es ist aufklärend, die Fundamentalmatrix und ihre Zerlegung für eine Differentialgleichung $w' = z^{-k}Aw$ mit einer konstanten Matrix A auszurechnen:

(9.6) Aufgabe. *Für welche k und A hat in diesem Fall $S(z)$ einen Pol bei 0?*
Antwort: Für $k = 1$ ist $S(z) = \mathbb{1}$, also regulär; für $k > 1$ hat $S(z)$ einen Pol genau wenn A nilpotent ist.

Wir wollen noch einen Blick darauf werfen, wie sich das Gesagte für die linear homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung ausnimmt, also

$$w^{[n]} + \sum_{j=0}^{n-1} q_j(z) w^{[n-j]} = 0. \tag{9.7}$$

mit Koeffizienten q_j, die bei 0 einen Pol haben können.
Wir können sie natürlich stets mit einer Potenz z^m multiplizieren, also auf die Gestalt bringen:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(z) z^k D^k w = 0, \quad a_n = 1,\ D = \frac{d}{dz}. \tag{9.8}$$

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Koeffizienten a_k bei 0 regulär sind. Für die Gleichung (9.7) bedeutet das: q_j hat bei 0 höchstens einen Pol der Ordnung j, nämlich nach Multiplikation mit z^n noch eine Nullstelle der Ordnung mindestens $n-j$.

Wie bei der Eulerschen Differentialgleichung in § 7 geübt, bringen wir die Differentialgleichung (9.8) in die Gestalt

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(z)\delta^k w = 0, \quad b_n = a_n = 1, \quad \delta w = z\frac{d}{dz}w. \tag{9.9}$$

Durch die Transformation $w(e^u) = v(u)$, auf die wir ja hinauswollen, also

$$(\delta w)(e^u) = (Dv)(u), \quad D = \frac{d}{du}, \tag{9.10}$$

entsteht aus (9.9) die Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(e^u)D^k v(u) = 0, \quad b_n = 1, \tag{9.11}$$

von der wir nach dem Gesagten, durch Übersetzen in ein System, erkennen, daß sie eine Wronski-Matrix der Gestalt

$$S(z)\cdot z^R \tag{9.12}$$

hat, wo $S(z)$ bei 0 höchstens einen Pol hat.

Übrigens kann man den Pol von S stets beseitigen, indem man

$$S(z)\cdot z^R \quad \text{durch} \quad (z^k S(z))\cdot z^{R-k\cdot \mathbb{1}}$$

ersetzt.

Es kann durchaus sein, daß $A(z)$ bei 0 singulär ist aber eine bei 0 analytische Fundamentalmatrix hat. Beispiel:

$$w' = z^{-1}w, \quad \text{Fundamentalmatrix } \Phi = z\cdot \mathbb{1}.$$

In diesem Fall ist jedoch stets $\det\,\Phi(0) = 0$, denn es wäre ja sonst $A = \Phi^{-1}\Phi'$ nicht singulär bei 0.