

---

## Kapitel III

# Maß und Integral

*Da mußst er mit dem frommen Heer  
durch ein Gebirge, wüst und leer.  
Dasselbst erhob sich große Not,  
viel Steine gab's und wenig Brot.*

*Ludwig Uhland*

Wir kennen das Riemannintegral für Funktionen einer Variablen auf einem Intervall  $[a, b]$ , und wir haben den zugehörigen Raum  $F_a^b$  der auf dem Intervall integrierbaren Funktionen mit verschiedenen Halbnormen (Seminormen) versehen, wie insbesondere der  $L^1$ -Norm, die wir jetzt so bezeichnen:

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx.$$

Durch Faktorisieren nach dem Unterraum der Funktionen der Norm 0 erhält man damit einen normierten reellen Vektorraum. Ein wesentlicher Mangel des Riemannintegrals ist, daß dieser Raum nicht vollständig ist: Cauchyfolgen brauchen nicht zu konvergieren. Dem wollen wir jetzt abhelfen. Wir entwickeln die Integrationstheorie in abstrakter Allgemeinheit. Alles ginge ebenso auch für Funktionen mit Werten in Banachräumen.

Der Leitgedanke ist schon, daß man eben den Raum der integrierbaren Funktionen komplettiert, indem man Grenzwerte für jede  $L^1$ -Cauchyfolge hinzunimmt, aber man muß auch diese hinzugenommenen Elemente als Funktionen realisieren. Warum? Genügt es nicht,

einfach formal mit Cauchyfolgen umzugehen? In vielen Fällen genügt das in der Tat nicht. Schon zum Beispiel, um eine  $L^1$ -Cauchyfolge Riemannintegrierbarer Funktionen anzugeben, die nicht gegen eine Riemannintegrierbare Funktion konvergiert, wird man, von höherer Warte, die wir jetzt besteigen wollen, den Grenzwert als Funktion beschreiben, die eben auch nach Abänderung um eine Nullfunktion nie Riemannintegrierbar wird.

## § 1. Meßräume

Auf der reellen Geraden haben wir als natürliche Definitionsbereiche von Funktionen und als Teilmengen, die zu messen waren, immer Intervalle mit ihrer Länge betrachtet. Darauf beruhte die Definition und insbesondere die Normierung des Integrals. Aber im Höherdimensionalen ist es natürlich, weniger einfach aussehende Mengen  $M$  zu betrachten, denen man dann statt einer Länge entsprechend ein Maß  $\mu(M)$  zuordnen will. Im  $\mathbb{R}^2$  sollte man sich unter  $\mu(M)$  etwa den Flächeninhalt von  $M$  und in  $\mathbb{R}^3$  das Volumen vorstellen. Man kann nicht erwarten, daß jeder Menge so auf sinnvolle Weise ein Maß zugeordnet wird. Wir beginnen also mit Forderungen an das System aller Teilmengen  $M$  eines Raumes  $X$  — uns interessiert dann hauptsächlich  $X = \mathbb{R}^n$  — die man messen kann. Dann formulieren wir Forderungen an das Maß  $\mu(M)$ .

**Definition.** Ein **Meßraum** besteht aus einer Menge  $X \neq \emptyset$ , deren Elemente wir **Punkte** nennen, und einer  $\sigma$ -**Algebra** auf  $X$ . Die  $\sigma$ -Algebra ist eine Menge  $\mathcal{M}$  von Teilmengen von  $X$ , die **meßbar** heißen, dergestalt, daß folgendes gilt:

- (i)  $\emptyset$  ist meßbar.
- (ii) Ist  $M$  meßbar, so auch das **Komplement**  $\mathfrak{C}M = X \setminus M$ .
- (iii) Ist  $(M_j \mid j \in \mathbb{N})$  eine abzählbare Familie meßbarer Mengen, so ist auch ihre Vereinigung  $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$  meßbar.

Durch Übergang zum Komplement folgt, daß auch  $X$  meßbar ist, und daß abzählbare Durchschnitte meßbarer Mengen meßbar sind. Setzt man  $M'_j = M_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} M_k$ , so ist

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} M'_j$$

eine disjunkte Vereinigung. Enthält also  $\mathcal{M}$  die leere Menge, mit jeder Menge das Komplement, mit zwei Mengen den Durchschnitt, und mit einer Familie  $(A_j \mid j \in \mathbb{N})$  von paarweise disjunkten Mengen die Vereinigung, so ist  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen Meßräumen heißt **meßbar**, wenn  $f^{-1}(N)$  meßbar in  $X$  ist, für jede meßbare Teilmenge  $N$  in  $Y$ . Zusammensetzungen meßbarer Abbildungen sind meßbar, und wir haben so die Kategorie der Meßräume und meßbaren Abbildungen.

Es gibt viele triviale Beispiele. Ist  $X \neq \emptyset$  eine beliebige Menge, so kann die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}$  nur aus  $\emptyset$  und  $X$  bestehen. Das ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Oder sie kann aus allen Teilmengen bestehen. Das ist die größte  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .

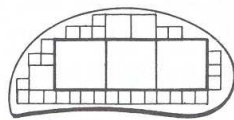
Ist  $X$  ein Meßraum mit  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}$  und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung von Mengen, so hat man auf  $Y$  die  $\sigma$ -Algebra  $f_*\mathcal{M}$  der Teilmengen  $N \subset Y$ , für die  $f^{-1}N$  in  $\mathcal{M}$  ist. Diese Algebra heißt das **direkte Bild** von  $\mathcal{M}$  unter  $f$ . Dies ist die größte  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$ , für die  $f$  meßbar ist.

Ist  $\mathcal{S}$  irgendein System von Teilmengen von  $Y$ , also eine Teilmenge der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(Y)$ , so gibt es eine kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$ , die  $\mathcal{S}$  enthält: Der Durchschnitt aller  $\sigma$ -Algebren, die  $\mathcal{S}$  enthalten: Sie heißt das **Erzeugnis**  $\mathcal{M}(\mathcal{S})$  von  $\mathcal{S}$ . Um festzustellen, ob eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  meßbar ist, braucht man nur zu prüfen, ob die Urbilder der Mengen  $M \in \mathcal{S}$  eines Erzeugendensystems  $\mathcal{S}$  der  $\sigma$ -Algebra von  $Y$  in  $X$  meßbar sind. Liegen nämlich die Erzeugenden im direkten Bild der  $\sigma$ -Algebra von  $X$ , so das ganze Erzeugnis.

Als Erzeugnis entsteht der Meßraum, auf den wir eigentlich hinauswollen. Ist  $X$  ein topologischer Raum, so erzeugt die Topologie, also das System aller offenen Teilmengen, eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Sie heißt die **Borelalgebra** auf  $X$ . Wenn wir nun hinfort einen topologischen Raum ohne weiteres als Meßraum ansprechen, so ist immer diese Struktur, die Borelalgebra gemeint. Stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen sind dann auch meßbar. Das gilt insbesondere für den  $\mathbb{R}^n$ , und in diesem Sinne sprechen wir von meßbaren Abbildungen  $X \rightarrow \mathbb{R}^n$  und von meßbaren Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$ . Ist  $X$  ein Meßraum, so ist eine Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  genau dann meßbar, wenn das Urbild jeder offenen Menge meßbar ist, weil die offenen Mengen ja die Borelalgebra auf  $\mathbb{R}^n$  erzeugen. Es gibt noch kleinere Erzeugendensysteme, zum Beispiel das aller **Elementarwürfel**

$$(1.1) \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid z_j/2^k \leq x_j \leq (z_j + 1)/2^k \text{ für } j = 1, \dots, n\},$$

mit  $z_j \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .



Jede offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist die Vereinigung der (abzählbar vielen) in ihr enthaltenen Elementarwürfel. In  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  kann man als Erzeugendensystem das System aller Intervalle

$$(1.2) \quad (a, \infty], \quad a \in \mathbb{Q}$$

wählen, denn durch Differenzbildung erhält man daraus alle Intervalle  $(a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$ , und daraus durch abzählbare Vereinigung alle offenen.

Eine meßbare Funktion  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , die nur endlich viele Werte annimmt, heißt eine **Stufenfunktion**. Das bedeutet, daß  $X$  in endlich viele meßbare Mengen  $M_1, \dots, M_k$  disjunkt zerlegt ist, auf denen

$\varphi$  jeweils konstant ist. Die früher von uns betrachteten Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}$  sind Beispiele. Hieraus gewinnen wir nun viele weitere meßbare Funktionen:

**(1.3) Satz.** Sei  $X$  ein Meßraum.

- (i) Eine Funktion  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ist genau dann meßbar, wenn für jedes  $a \in \mathbb{Q}$  die Mengen  $\{x \mid f(x) > a\}$  in  $X$  meßbar sind.
- (ii) Eine Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann meßbar, wenn ihre Komponenten  $f_1, \dots, f_n$  meßbar sind.
- (iii) Die meßbaren Abbildungen  $X \rightarrow \mathbb{R}^n$  bilden einen Vektorraum.
- (iv) Ist  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  meßbar, so auch  $|f| : X \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Sind  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  meßbar, so auch  $f \cdot g$ .

Statt  $\{x \mid f(x) > a\}$  schreiben wir wie üblich kurz  $\{f > a\}$ .

**Beweis:** (i) folgt, weil  $\bar{\mathbb{R}}$  das Erzeugendensystem (1.2) hat, und (ii) ergibt sich analog mit (1.1). Das übrige folgt, weil die Abbildungen  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x, y) \mapsto \lambda x + \mu y$ , ebenso wie  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|$ , ... stetig sind.  $\square$

Bemerkenswert ist, daß Meßbarkeit sich auf Grenzwerte überträgt.

**(1.4) Satz.**

- (i) Ist  $(f_j \mid j \in \mathbb{N})$  eine Folge meßbarer Funktionen  $X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , so sind auch die punktweise gebildeten Funktionen

$$\sup(f_j \mid j \in \mathbb{N}), \quad \inf(f_j \mid j \in \mathbb{N}), \quad \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} (f_j), \quad \underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} (f_j)$$

meßbar. Konvergiert  $(f_j)$  punktweise gegen  $f$ , so ist auch  $f$  meßbar.

- (ii) Konvergiert eine Folge meßbarer Funktionen  $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  punktweise gegen die Funktion  $f$ , so ist  $f$  meßbar.
- (iii) Ist  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  meßbar, so gibt es eine aufsteigende Folge  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$  von Stufenfunktionen  $\varphi_j$ , die punktweise gegen  $f$  konvergiert, also  $f = \sup(\varphi_j \mid j \in \mathbb{N})$  und insbesondere  $|\varphi_j| \leq |f|$ .

**Beweis:** (i) Die Menge  $\{\sup_j f_j > a\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{f_j > a\}$  ist meßbar, und für  $\inf_j f_j$  analog. Daraus folgt dann, daß auch  $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} (f_j) =$



Stufenfunktionen nennt man auch **einfach** oder **elementar**. Das Wort “Treppenfunktionen” brauchen wir später für integrierbare Stufenfunktionen.

## § 2. Maße

Meßbare Mengen wollen wir messen, wir wollen ihnen im Eindimensionalen eine Länge, im Zweidimensionalen einen Flächeninhalt, im Dreidimensionalen ein Volumen zuordnen.

**Definition.** Ein **Maß** auf einem Meßraum  $(X, \mathcal{M})$  ist eine Funktion  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  mit den Eigenschaften:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- (ii) Die Funktion  $\mu$  ist  **$\sigma$ -additiv**, das heißt: Ist  $(M_j \mid j \in \mathbb{N})$  eine Folge paarweise disjunkter meßbarer Mengen, so ist

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j).$$

Ein **Maßraum**  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ist ein Meßraum mit einem Maß.

Dabei rechnen wir mit  $\infty$  nach den Regeln

$$\begin{aligned} \infty \cdot 0 &= 0 \cdot \infty = 0, \\ \infty \cdot a &= a \cdot \infty = \infty \quad \text{für } 0 < a \leq \infty, \\ \infty + a &= a + \infty = \infty \quad \text{für } 0 \leq a \leq \infty. \end{aligned}$$

Die Summe der Reihe in der Definition ist entsprechend in  $[0, \infty]$  zu nehmen, wo jede Reihe mit nicht negativen Gliedern konvergiert.

Es gibt sehr einfache Beispiele. Ist  $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra, so kann man  $\mu(X)$  beliebig festsetzen. Für die größte  $\sigma$ -Algebra, bei der alle Mengen meßbar sind, hat man:

- (2.1)** Das **Dirac-Maß**  $\delta_p$  für  $p \in X$ : Es ist  $\delta_p(M) = 1$  falls  $p \in M$ , und  $\delta_p(M) = 0$  sonst.

**(2.2) Das Zählmaß  $\zeta$ :** Es ist  $\zeta(M)$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , wenn diese endlich ist, und sonst  $\zeta(M) = \infty$ .

Das sind in ihrer Art ganz nützliche Maße, aber doch nicht das, worauf wir hinauswollen. Vielmehr möchten wir Borelmengen in  $\mathbb{R}^n$  messen und dabei für einen Würfel  $W \subset \mathbb{R}^n$  als  $\mu(W)$  das Produkt der Kantenlängen erhalten. Gibt es so ein Maß? Das ist nicht selbstverständlich. In diesem Abschnitt wollen wir eine allgemeine Konstruktion vorführen, die insbesondere für  $\mathbb{R}$  dieses Maß liefert. Im nächsten Kapitel behandeln wir dann Produkte von Maßräumen, und damit auch  $\mathbb{R}^n$ .

Zunächst wollen wir die Axiome für Maße etwas näher betrachten. Das Maß  $\mu$  ist **additiv**, das heißt, für  $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$  ist

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2), \quad \text{wenn } A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Das folgt aus (ii), wenn man alle folgenden  $A_j$  gleich  $\emptyset$  wählt. Man erhält daraus allgemein:

$$\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2),$$

indem man alles in die disjunkten Teile  $A_1 \setminus A_2$ ,  $A_2 \setminus A_1$ ,  $A_1 \cap A_2$  zerlegt.

Das Maß ist **monoton**, d. h. für  $A \subset B$  aus  $\mathcal{M}$  ist  $\mu(A) \leq \mu(B)$ , denn  $\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$ .

Für eine beliebige Folge  $(A_n)$  in  $\mathcal{M}$  gilt die Abschätzung

$$(2.3) \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Setze nämlich  $A'_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$ , dann gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ist  $(A_n)$  eine aufsteigende Folge in  $\mathcal{M}$ , also  $A_n \subset A_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist

$$(2.4) \quad \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad \text{für} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Setze nämlich  $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ , dann ist  $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$  eine disjunkte Zerlegung, und  $\mu(A_n) = \sum_{j=1}^n \mu(B_j)$ . Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert letzteres gegen  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \mu(A)$ .

Ist  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  eine additive Funktion, so ist sie genau dann  $\sigma$ -additiv, wenn sie eine der Eigenschaften (2.3) oder (2.4) hat. Das sieht man leicht, indem man die Argumente zurückspult.

Jetzt wollen wir schauen, was das Riemannintegral auf dem Wege zu einem Maß auf  $\mathbb{R}$  schon liefert. Sei also  $X = \mathbb{R}$  und sei  $\mathcal{A}$  das System aller endlichen Vereinigungen endlicher Intervalle in  $\mathbb{R}$ . Für  $A \in \mathcal{A}$  sei

$$\mu(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x) dx,$$

wobei  $\chi_A$  die charakteristische Funktion ist ( $\chi_A(x) = 1$  für  $x \in A$  und  $\chi_A(x) = 0$  sonst). Diese Funktionen für  $A \in \mathcal{A}$  sind ja offenbar Riemann-integrierbar. Wir nennen  $\mu$  auch das **Maß** auf  $\mathcal{A}$ , obwohl  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  noch kein Maßraum ist, denn  $\mathcal{A}$  ist keine  $\sigma$ -Algebra. Immerhin erfüllt  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  folgende

### (2.5) Maßregeln.

- (i) Das System  $\mathcal{A}$  von Teilmengen von  $X$  ist eine **Mengenalgebra**, d.h.  $\emptyset \in \mathcal{A}$  und mit  $A, B \in \mathcal{A}$  sind auch  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  in  $\mathcal{A}$ .
- (ii) Das Maß  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ist **additiv**, d.h.  $\mu(\emptyset) = 0$ , und  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ , falls  $A \cap B = \emptyset$ .
- (iii) Das Maß ist  **$\sigma$ -additiv**, d.h. ist  $(A_n)$  eine Folge paarweise disjunkter Mengen in  $\mathcal{A}$  und ist auch  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  in  $\mathcal{A}$ , so ist

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(iv) Das Maß ist  $\sigma$ -endlich, d.h. es gibt eine Folge  $(S_n)$  in  $\mathcal{A}$  mit

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \quad \text{und} \quad \mu(S_n) < \infty.$$

Wir werden zeigen, daß sich ein Maß auf einer Mengenalgebra  $\mathcal{A}$ , das den Maßregeln genügt, eindeutig fortsetzen läßt zu einem Maß auf der von  $\mathcal{A}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ . Das liefert in unserem Beispiel dann das Maß auf  $\mathbb{R}$  mit der Borel algebra. Für die Existenz der Fortsetzung braucht man nur die Maßregeln (i) - (iii); man spricht hier auch von einem **Prämaß** auf  $\mathcal{A}$ . Die  $\sigma$ -Endlichkeit wird erst gebraucht, damit die Fortsetzung eindeutig bestimmt ist.

**Beweis** (2.5): Nur (iii) ist nicht trivial. Sei  $B_n = A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ , dann ist

$$B_n \in \mathcal{A}, \quad B_n \supset B_{n+1}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset,$$

und wir müssen zeigen:

$$\mu(B_n) \rightarrow 0.$$

Sei also  $\varepsilon > 0$  gegeben. Zu jedem  $B_n$  verschafft man sich ein Kompaktum  $C_n \subset B_n$  in  $\mathcal{A}$  mit  $\mu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon/2^n$ , zum Beispiel als Vereinigung von endlich vielen kompakten Intervallen. Für  $D_n = C_1 \cap \dots \cap C_n$  ist dann auch  $D_n \subset B_n$  und  $B_n \setminus D_n = \bigcup_{k=1}^n (B_n \setminus C_k) \subset \bigcup_{k=1}^n (B_k \setminus C_k)$ , also

$$\mu(B_n \setminus D_n) < \sum_{k=1}^n \varepsilon/2^k < \varepsilon.$$

Nun sind die Mengen  $D_n$  alle kompakt, die Folge  $(D_n)$  steigt ab, also  $D_n \supset D_{n+1}$ , und weil  $D_n \subset B_n$  und der Durchschnitt der  $B_n$  leer ist, ist auch der Durchschnitt der  $D_n$  leer, also schließlich ist  $D_n$  leer, und von dann an ist  $\mu(B_n) < \varepsilon$ .  $\square$

Damit kommen wir zum Hauptergebnis dieses Abschnitts.

**(2.6) Satz** (von Hahn über Maßerweiterung). Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  eine Mengenalgebra mit einem Maß, und die Maßregeln (2.5) seien erfüllt.

Dann läßt sich  $\mu$  auf genau eine Weise erweitern zu einem Maß auf der von  $\mathcal{A}$  auf  $X$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ , und zwar ist

$$\mu(M) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

wobei das Infimum über alle Folgen  $(A_n)$  in  $\mathcal{A}$  zu nehmen ist, für die  $M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

Setzt man nicht voraus, daß das gegebene Prämaß  $\sigma$ -endlich ist, so bildet man hier und im folgenden Lemma (2.7) gelegentlich das Infimum über die leere Menge. Das liefert dann immer passend  $\infty$ , wie man im einzelnen überprüfen mag, aber wir wollen das nicht immer eigens erwähnen.

Der Beweis des Satzes besteht im wesentlichen aus den folgenden beiden Aussagen (2.7), (2.8) über äußere Maße, die auch für sich nicht ohne Interesse sind.

Sei  $\mathcal{N}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Ein **äußeres Maß** auf  $\mathcal{N}$  ist eine Funktion  $\mu^* : \mathcal{N} \rightarrow [0, \infty]$  mit den Eigenschaften:

- (i)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .
- (ii) *Monotonie:* Sind  $A \subset B$  in  $\mathcal{N}$ , so ist  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ .
- (iii) *Ist  $(A_n)$  eine Folge in  $\mathcal{N}$ , so ist*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

**(2.7) Lemma.** *Unter den Voraussetzungen des Satzes definiert*

$$\mu^*(Y) := \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

wobei das Infimum über alle Folgen  $(A_n)$  in  $\mathcal{A}$  mit  $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  genommen wird, ein äußeres Maß auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{P}(X)$  aller Teilmengen von  $X$ , und es ist

$$\mu^*(A) = \mu(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

**Beweis:** Zuerst zeigen wir die letzte Gleichung. Sei also  $A \in \mathcal{A}$ .  
Aus

$$A \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$$

folgt  $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ . Jetzt wähle zu  $\varepsilon > 0$  eine Folge  $(A_n)$  in  $\mathcal{A}$  mit  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Weil  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A)$ , folgt:

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Weil das für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt  $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ .

Also  $\mu(A) = \mu^*(A)$  für alle  $A$  aus  $\mathcal{A}$ .

Die Eigenschaften (i), (ii) eines äußeren Maßes sind offenbar. Und (iii) folgt mit dem immer wiederkehrenden  $\varepsilon/2^n$ -Beweis: Sei  $(Y_j)$  eine Folge von Teilmengen von  $X$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wähle eine Folge  $(A_n^j \mid n \in \mathbb{N})$  in  $\mathcal{A}$  mit  $Y_j \subset \bigcup_n A_n^j$  und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^j) \leq \mu^*(Y_j) + \varepsilon/2^j.$$

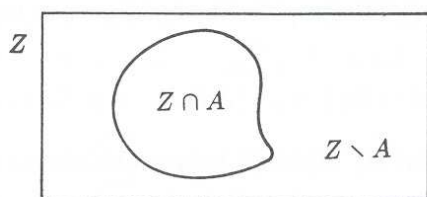
Dann ist  $Y := \bigcup_j Y_j \subset \bigcup_{n,j} A_n^j$ , und

$$\mu^*(Y) \leq \sum_{n,j} \mu(A_n^j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Y_j) + \varepsilon.$$

Beachte, daß man auch  $(A_n^j \mid n, j \in \mathbb{N})$  als Folge abzählen kann. Dies zeigt  $\mu^*(Y) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Y_j)$ , und damit die Behauptung.  $\square$

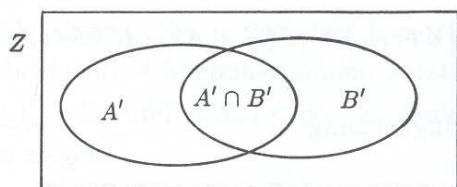
Jetzt sei  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf der Potenzmenge von  $X$ . Wir nennen eine Teilmenge  $A$  von  $X$  dann  $\mu^*$ -**meßbar**, wenn für jede Teilmenge  $Z$  von  $X$  gilt

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$



**(2.8) Lemma** (von Carathéodory). Sei  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf der Potenzmenge von  $X$ . Sei  $\mathcal{M}$  das System der  $\mu^*$ -meßbaren Teilmengen von  $X$ . Dann ist  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu^*$  ein Maß auf  $\mathcal{M}$ .

**Beweis:** Wir zeigen, daß  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist. Offenbar ist  $\emptyset \in \mathcal{M}$ , und mit  $A$  ist auch  $X \setminus A$  in  $\mathcal{M}$ . Seien nun  $A, B \in \mathcal{M}$ . Wir zeigen  $A \cap B \in \mathcal{M}$ . Sei also  $Z \subset X$  eine beliebige Teilmenge. Für Teilmengen  $C$  von  $X$  setze  $C' = Z \cap C$ . Weil  $B$   $\mu^*$ -meßbar ist, haben wir:



$$\mu^*(A' \cap B') + \mu^*(A' \setminus B') = \mu^*(A').$$

Addiere beidseits  $\mu^*(Z \setminus A')$ , dann steht rechts  $\mu^*(Z)$ , weil  $A \in \mathcal{M}$ , also

$$\mu^*(A' \cap B') + \mu^*(A' \setminus B') + \mu^*(Z \setminus A') = \mu^*(Z),$$

und wir müssen zeigen:

$$\mu^*(A' \setminus B') + \mu^*(Z \setminus A') = \mu^*(Z \setminus (A' \cap B')).$$

Das aber gilt, weil  $A$  meßbar ist, wähle  $Z \setminus (A' \cap B')$  statt  $Z$ .

Damit wissen wir, daß  $\mathcal{M}$  eine Mengenalgebra ist.

Seien nun  $A, B \in \mathcal{M}$  disjunkt. Dann folgt für jede Teilmenge  $Z$  von  $X$

$$\mu^*(Z \cap (A \cup B)) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap B).$$

Wähle nämlich  $Z \cap (A \cup B)$  statt  $Z$  in der Definition der  $\mu^*$ -Meßbarkeit. Induktiv folgt für paarweise disjunkte  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$  dann:

$$\mu^*(Z \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n)) = \sum_{k=1}^n \mu^*(Z \cap A_k).$$

Nun sei  $(A_n)$  eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen in  $\mathcal{M}$  mit Vereinigung  $A$ . Dann gilt für jede Teilmenge  $Z$  von  $X$ :

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &= \mu^*(Z \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n)) + \mu^*(Z \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)) \\ &\geq \sum_{k=1}^n \mu^*(Z \cap A_k) + \mu^*(Z \setminus A) \end{aligned}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Daher, weil  $\mu^*$  ein äußeres Maß ist,

$$\mu^*(Z) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap A_k) + \mu^*(Z \setminus A) \geq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

Die umgekehrte Ungleichung

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$$

gilt allgemein, weil  $\mu^*$  ein äußeres Maß ist. Also gilt Gleichheit und  $A$  ist meßbar. Damit ist  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra, und aus

$$\sum_{k=1}^n \mu^*(A_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

folgt durch Übergang  $n \rightarrow \infty$ , daß  $\mu^*$  auch  $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{M}$  ist.  $\square$

**Beweis (2.6):** Für die Existenzaussage bleibt  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  zu zeigen. Sei also  $A \in \mathcal{A}$  und  $Z$  eine beliebige Teilmenge von  $X$ . Die Ungleichung

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$$

gilt, weil  $\mu^*$  ein äußeres Maß ist. Für die Umkehrung sei  $\varepsilon > 0$  und  $(A_n)$  eine Folge in  $\mathcal{A}$  mit  $Z \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(Z) + \varepsilon.$$

Dann ist  $Z \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A)$  und  $Z \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A)$ .  
Folglich

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(Z) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Das zeigt die Existenz der Erweiterung von  $\mu$  zu einem Maß auf der von  $\mathcal{A}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}$ . Soweit haben wir noch gar nicht benutzt, daß  $\mu$  ein  $\sigma$ -endliches Maß auf  $\mathcal{A}$  ist.

Nun zur Eindeutigkeit. Sei  $\mu$  das eben konstruierte Maß und  $\nu$  ein anderes, die beide auf  $\mathcal{A}$  übereinstimmen. Jetzt sei  $(S_n)$  die Folge in  $\mathcal{A}$  mit  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$  und  $\mu(S_n) < \infty$ . Es genügt nach (2.4), für jedes  $Y \in \mathcal{M}$  zu zeigen:

$$\nu(Y \cap S_n) = \mu(Y \cap S_n).$$

Also genügt zu zeigen: Hat  $A \in \mathcal{A}$  endliches Maß und ist  $Y \in \mathcal{M}$ ,  $Y \subset A$ , so ist  $\nu(Y) = \mu(Y)$ . Nach Definition ist

$$\mu(Y) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n),$$

wobei das Infimum für alle Folgen  $(A_n)$  in  $\mathcal{A}$  mit  $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  genommen wird. Weil  $\nu(Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$ , folgt  $\nu(Y) \leq \mu(Y)$ . Aber auch  $\nu(A \setminus Y) \leq \mu(A \setminus Y)$ . Jedoch

$$\mu(A) = \nu(A) = \nu(A \setminus Y) + \nu(Y) \leq \mu(A \setminus Y) + \mu(Y) = \mu(A).$$

Das zeigt, daß überall Gleichungen stehen,  $\nu(Y) = \mu(Y)$ .

Damit ist (2.6) vollständig bewiesen.  $\square$

Das Maß, das wir auf  $\mathbb{R}$  aus (2.5) und (2.6) gewonnen haben, heißt das **eindimensionale Lebesguemaß**. Man kann ganz analog auf  $\mathbb{R}^n$  mit dem Elementarvolumen, dem Produkt der Kantenlängen für achsenparallele Quader also Produkte endlicher Intervalle, beginnen und auf dem Wege über (2.5) und (2.6) das  **$n$ -dimensionale Lebesguemaß** definieren.

Zu jedem Maß  $\mu$  auf einem Meßraum  $(X, \mathcal{M})$  hat man das **äußere Maß**  $\mu^*$  von (2.7) für beliebige Teilmengen von  $X$ . Teilmengen  $Y \subset X$  mit  $\mu^*(Y) = 0$  heißen **Nullmengen**. Sie liegen nach Definition in einer meßbaren Menge  $M_n$  mit  $\mu(M_n) < 1/n$ , und damit auch in  $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ , einer meßbaren Menge vom Maß 0. Also die Nullmengen sind genau die Teilmengen einer Menge vom Maß Null. Sie brauchen ansich selbst nicht zu  $\mathcal{M}$  gehören, aber sie sind  $\mu^*$ -meßbar vom Maß Null. Ist nämlich  $Z \subset X$  beliebig und  $N$  eine Nullmenge, so ist

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap N) + \mu^*(Z \setminus N) = \mu^*(Z \setminus N) \leq \mu^*(Z),$$

also die Ungleichungen sind Gleichungen.

Man kann die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}$  um die Nullmengen erweitern: eine Teilmenge  $Y$  von  $X$  heißt  **$\mu$ -meßbar**, wenn  $Y$  Vereinigung einer meßbaren Menge und einer Nullmenge ist. Man prüft sofort nach, daß die  $\mu$ -meßbaren Mengen wieder eine  $\sigma$ -Algebra bilden, auf die sich  $\mu$  offenbar eindeutig fortsetzt. Den so entstehenden Maßraum nennt man auch die **Lebesgue-Komplettierung** von  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Der Übergang zu dieser Komplettierung ist oft bequem und glättet die Formulierungen in der Integralrechnung. Übrigens sind die  $\mu$ -meßbaren Mengen genau die im obigen Sinne  $\mu^*$ -meßbaren (warum?).

Man sagt, eine Eigenschaft von Punkten  $x \in X$  gilt **fast überall** oder für **fast jedes**  $x$ , eigentlich  $\mu$ -fast überall, wenn die Ausnahmemenge eine Nullmenge ist.

Blicken wir noch einmal auf die Konstruktion des Maßes zurück, so kann man die Idee wie folgt beschreiben: Wir wollen eine Teilmenge  $Y$  messen, und wir wollen annehmen, daß  $Y$  in einer Menge  $S$  liegt, die wir schon messen können; etwa in einem großen Würfel im Falle des Lebesguemaßes. Der Ansatz von Riemann und eigentlich schon von Archimedes ist, daß man  $Y$  von außen durch Mengen aus  $\mathcal{A}$  einschließt, die man schon messen kann. Als Infimum der so gewonnenen oberen Abschätzungen des Volumens erhält man  $\mu^*(Y)$ . Ebenso kann man  $Y$  von innen durch abzählbare disjunkte Vereinigungen von Mengen aus  $\mathcal{A}$  ausschöpfen und gewinnt als Supremum der so gewonnenen unteren Abschätzungen des Volumens  $\mu_*(Y)$ . Ist nun  $\mu^*(Y) = \mu_*(Y)$ , so hätte man das Maß  $\mu(Y)$ . Jedoch führt dieser Ansatz nicht zu einem Maß auf einer  $\sigma$ -Algebra. Ist etwa  $Q$  die Menge der rationalen Punkte des Einheitsintervalls, so ist  $Q$  abzählbar, also  $\mu(Q) = 0$ , wenn ein Punkt das Maß 0 hat. Folglich sollte die Menge  $Y$  der irrationalen Punkte im Einheitsintervall das Maß 1 haben, aber diese Menge enthält nur punktförmige Intervalle, man kann sie nicht passend durch Intervalle ausschöpfen.

Der Ansatz von Lebesgue ist nun, daß man zwar die obere Abschätzung  $\mu^*(Y)$  wie zuvor gewinnt, jedoch für die untere Abschätzung bildet man das äußere Maß des Komplements  $\mu^*(S \setminus Y)$ , also man setzt

$$\mu_*(Y) := \mu(S) - \mu^*(S \setminus Y).$$

Der Erfolg rechtfertigt die Mittel.

### § 3. Konstruktion des Integrals

In diesem Abschnitt sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum, auf den sich dann alle Aussagen über meßbare Mengen und Maße beziehen. Eine Funktion  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine **Treppenfunktion**, wenn  $\varphi$  nur endlich viele Werte annimmt, und für jedes  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  die **Stufe**

$\varphi^{-1}\{c\}$  meßbar mit endlichem Maß ist. Die gewohnten Treppenfunktionen  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind Beispiele, aber auch die charakteristische Funktion von  $\mathbb{Q}$ .

Die sämtlichen Treppenfunktionen auf  $X$  bilden einen reellen Vektorraum  $\mathcal{T}(\mu)$ , sogar eine Algebra mit der gewöhnlichen Multiplikation von Funktionen. Ist nämlich  $\varphi$  auf den meßbaren Teilmengen  $M_i$  und  $\psi$  auf den  $N_j$  konstant, so sind  $\varphi + \psi$  und  $\varphi \cdot \psi$  auf den Teilmengen  $M_i \cap N_j$  konstant. Das gegebene Maß liefert sofort ein wohlbestimmtes Integral für Treppenfunktionen. Ist nämlich  $\varphi|_{M_i} = c_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , konstant und  $M_i \cap M_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ , so setzen wir

$$(3.1) \quad \int_X \varphi d\mu := \sum_{i=1}^k c_i \mu(M_i).$$

Für  $c_i = 0$  ist hier nach unserer Konvention  $c_i \cdot \mu(M_i) = 0$ , auch für  $\mu(M_i) = \infty$ .

Dies ist unabhängig von der Zerlegung  $(M_i \mid i = 1, \dots, k)$  von  $X$ , denn hat man eine andere Zerlegung  $(N_j \mid j = 1, \dots, \ell)$ , so gehe man zur gemeinsamen Verfeinerung  $(M_i \cap N_j)$  über. So haben wir das Integral als lineares Funktional, d.h. als lineare Abbildung

$$\int : \mathcal{T}(\mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \int_X \varphi d\mu.$$

Zur Ausdehnung auf eine größere Funktionenklasse haben wir früher die Monotonie des Integrals gefordert und benutzt. Auch das hier betrachtete Integral ist monoton, aber wir haben auch gelernt, daß ein anderer Gesichtspunkt sehr wesentlich ist: Ein Integral liefert verschiedene Halbnormen (Seminormen) auf dem Raum der integrierbaren Funktionen, und es wäre erwünscht, auf diese Weise vollständige Vektorräume zu erhalten. Diesen Gedanken verfolgen wir jetzt.

Das Integral (3.1) liefert uns auf dem reellen Vektorraum  $\mathcal{T}(\mu)$  die  **$L^1$ -Norm**

$$(3.2) \quad \|\varphi\|_1 := \int_X |\varphi| d\mu.$$

Dies ist (nur) eine Seminorm auf  $\mathcal{T}(\mu)$ , wir haben die

**(3.3) Eigenschaften einer Seminorm.**

- (i)  $\|\varphi\|_1 \geq 0$ .
- (ii) *Positive Homogenität:* Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist  $\|\lambda\varphi\|_1 = |\lambda| \cdot \|\varphi\|_1$ .
- (iii) *Dreiecksungleichung:*  $\|\varphi + \psi\|_1 \leq \|\varphi\|_1 + \|\psi\|_1$ .

Zur Norm fehlt die Eigenschaft  $\|\varphi\|_1 = 0 \implies \varphi = 0$ , aber wir wissen schon, daß das nicht so schlimm ist, denn die Dreiecksungleichung und positive Homogenität liefern, daß die  $\varphi$  mit  $\|\varphi\|_1 = 0$  einen Unterraum von  $\mathcal{T}(\mu)$  bilden, den Unterraum  $\mathcal{N}(\mu)$  der Nullfunktionen. Auf dem Quotienten  $\mathcal{T}(\mu)/\mathcal{N}(\mu)$  hat man dann eine genuine  $L^1$ -Norm. Jedenfalls wissen wir, was eine  $L^1$ -Cauchyfolge in  $\mathcal{T}(\mu)$  ist, nämlich eine Folge  $(\varphi_n \mid n \in \mathbb{N})$  mit der Eigenschaft: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodaß  $\|\varphi_{n+k} - \varphi_n\|_1 < \varepsilon$  für alle  $k \geq 0$ . Grundlegend für die Konstruktion des Integrals ist das folgende

**(3.4) Konstruktionslemma.** *Eine  $L^1$ -Cauchyfolge  $(\varphi_n)$  von Treppenfunktionen hat stets eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert, und zwar so, daß zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Menge  $Z$  vom Maß kleiner  $\varepsilon$  existiert, außerhalb von der die Teilfolge gleichmäßig konvergiert.*

**Beweis:** Bestimme rekursiv eine Teilfolge, die wir der Einfachheit halber auch mit  $(\varphi_n)$  bezeichnen, so daß

$$\|\varphi_n - \varphi_k\|_1 \leq 2^{-2k} \quad \text{für alle } k \text{ und } n \geq k.$$

Die Mengen  $Y_k = \{|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \geq 2^{-k}\}$  sind meßbar, und es gilt

$$2^{-k} \mu(Y_k) \leq \int |\varphi_{k+1} - \varphi_k| d\mu \leq 2^{-2k},$$

also  $\mu(Y_k) \leq 2^{-k}$ . Setzen wir daher

$$Z_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} Y_n, \quad \text{so ist } \mu(Z_k) \leq 2 \cdot 2^{-k}.$$

Für  $x \notin Z_k$  gilt dann

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq 2^{-n} \quad \text{für alle } n \geq k.$$

Das zeigt, daß die zur Folge  $(\varphi_n)$  assoziierte Reihe  $\sum_n(\varphi_{n+1} - \varphi_n)$  auf  $X \setminus Z_k$  gleichmäßig konvergiert, und  $\mu(Z_k) \leq 2 \cdot 2^{-k}$  wird für große  $k$  beliebig klein. Insbesondere konvergiert die Reihe in jedem  $x \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k$ , und  $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k) = 0$ .  $\square$

Ist  $(\varphi_n)$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge von Treppenfunktionen, so liefert  $(\int \varphi_n d\mu)$  eine Cauchyfolge also konvergente Folge reeller Zahlen, denn

$$\left| \int \varphi_j d\mu - \int \varphi_\ell d\mu \right| = \left| \int (\varphi_j - \varphi_\ell) d\mu \right| \leq \int |\varphi_j - \varphi_\ell| d\mu.$$

Das Lemma ermutigt daher zu folgender

**Definition.** Eine Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **integrabel** (genauer: *Lebesgue-integrabel*), wenn es eine  $L^1$ -Cauchyfolge  $(\varphi_n \mid n \in \mathbb{N})$  von Treppenfunktionen gibt, die fast überall punktweise gegen  $f$  konvergiert. Die Zahl

$$\int_X f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu$$

heißt das **Integral** von  $f$  über  $X$ . Ist  $Y$  in  $X$  meßbar, so ist

$$\int_Y f d\mu := \int_X (\chi_Y \cdot f) d\mu.$$

Daß das so erklärte Integral wohldefiniert ist, folgt aus

**(3.5) Lemma.** Es seien  $(\varphi_n)$  und  $(\psi_n)$  zwei  $L^1$ -Cauchyfolgen von Treppenfunktionen, die beide fast überall punktweise gegen dieselbe Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  konvergieren. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \psi_n\|_1 = 0, \quad \text{also} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n d\mu.$$

**Beweis:** Die  $L^1$ -Cauchyfolge  $\tau_n = \varphi_n - \psi_n$  von Treppenfunktionen konvergiert fast überall punktweise gegen 0 und wir müssen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tau_n\|_1 = 0$  zeigen. Weil  $(\tau_n)$  ja eine  $L^1$ -Cauchyfolge ist, genügt es, dies für eine Teilfolge zu zeigen, und wir gehen zu einer Teilfolge wie in (3.4) über, die wir wieder mit  $(\tau_n)$  bezeichnen. Sei nun  $\varepsilon > 0$  und  $k$  so groß gewählt, daß

$$\|\tau_n - \tau_k\|_1 < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq k,$$

und es sei eine meßbare Menge  $Z$  in  $X$  so gewählt, daß  $(\tau_n)$  auf  $X \setminus Z$  gleichmäßig konvergiert und

$$\mu(Z) < \|\tau_k\|^{-1} \cdot \varepsilon \quad (\text{Supremumsnorm}).$$

Beachte, daß  $\tau_k$  nur endlich viele Werte annimmt. Sei  $M \subset X$  die Menge, wo  $\tau_k$  nicht verschwindet, dann ist  $\mu(M) < \infty$ , und wir haben die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\tau_n\|_1 &= \int_X |\tau_n| d\mu \leq \int_Z |\tau_n| d\mu + \int_{M \setminus Z} |\tau_n| d\mu + \int_{X \setminus M} |\tau_n| d\mu. \\ \int_Z |\tau_n| d\mu &\leq \int_Z |\tau_n - \tau_k| d\mu + \int_Z |\tau_k| d\mu \leq \|\tau_n - \tau_k\|_1 + \mu(Z) \cdot \|\tau_k\| < 2\varepsilon. \\ \int_{M \setminus Z} |\tau_n| d\mu &\leq \|\tau_n\|_{X \setminus Z} \cdot \mu(M) < \varepsilon \quad \text{für genügend große } n. \\ \int_{X \setminus M} |\tau_n| d\mu &\leq \int_{X \setminus M} |\tau_n - \tau_k| d\mu + \int_{X \setminus M} |\tau_k| d\mu \leq \|\tau_n - \tau_k\|_1 < \varepsilon \end{aligned}$$

für  $n \geq k$ , der zweite Summand verschwindet. Zusammen:

$$\|\tau_n\|_1 < 4\varepsilon \quad \text{für genügend große } n. \quad \square$$

### (3.6) Regeln für das Integral.

- (i) Die integrierbaren Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  bilden einen reellen Vektorraum  $\mathcal{L}^1(\mu)$  und das Integral ist eine lineare Abbildung

$$\int : \mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}.$$

(ii) *Monotonie:* Sind  $f, g$  integabel und  $f \geq g$  fast überall, so ist

$$\int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu.$$

(iii) *Ist  $Y$  meßbar von endlichem Maß, so ist  $\chi_Y$  integabel und*

$$\int_X \chi_Y d\mu = \int_Y d\mu = \mu(Y).$$

(iv) *Zerlegungseigenschaft:* Sind  $Y, Z$  disjunkt und meßbar, und ist  $f : Y \cup Z \rightarrow \mathbb{R}$  integabel (d.h.  $\chi_{Y \cup Z} \cdot f$  integabel auf  $X$ ), so sind  $f|_Y$  und  $f|_Z$  integabel und

$$\int_{Y \cup Z} f d\mu = \int_Y f d\mu + \int_Z f d\mu.$$

(v) *Ist  $f$  integabel, so auch  $|f|$ , und*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu =: \|f\|_1$$

(vi) *Die  $L^1$ -Norm*

$$\mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow [0, \infty), \quad f \mapsto \|f\|_1 := \int_X |f| d\mu$$

*ist eine Seminorm auf  $\mathcal{L}^1(\mu)$  und das Integral ist stetig für diese Seminorm auf  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .*

(vii) *Abänderung einer Funktion auf einer Nullmenge ändert weder die Integrierbarkeit noch gegebenenfalls das Integral.*

**Beweis:** Dies geht ganz von selbst; zum Beispiel für (i) seien  $f, g$  integabel und  $(\varphi_n), (\gamma_n)$  seien  $L^1$ -Cauchyfolgen von Treppenfunktionen, die fast überall gegen  $f$  beziehungsweise  $g$  punktweise konvergieren. Dann geht die  $L^1$ -Cauchyfolge  $(\varphi_n + \gamma_n)$  fast überall punktweise gegen  $f + g$ , und

$$\int (f + g) := \lim_n \int (\varphi_n + \gamma_n) = \lim_n \int \varphi_n + \lim_n \int \gamma_n =: \int f + \int g.$$

Für (v) sei  $(\varphi_n)$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge, die fast überall punktweise gegen  $f$  geht. Dann geht  $(|\varphi_n|)$  eben da gegen  $|f|$ , und wegen

$$\left| |\varphi_n| - |\varphi_m| \right| \leq |\varphi_n - \varphi_m|, \text{ also } \left\| |\varphi_n| - |\varphi_m| \right\|_1 \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_1,$$

ist auch  $(|\varphi_n|)$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge. Das weitere überträgt sich von den Treppenfunktionen. (ii) und (vi) folgen aus (v) und der Rest ist leicht anzufügen.  $\square$

Aus (v) hat man, daß auch

$$(3.7) \quad f_+ := \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f_- := f_+ - f,$$

und  $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|$  mit  $f$  und  $g$  integrierbar sind.

**(3.8) Satz.** *Integrierbare Funktionen sind  $\mu$ -messbar, also messbar nach Änderung auf einer Nullmenge. Ist  $f$  integrierbar, so ist genau dann  $\|f\|_1 = 0$ , wenn  $f$  fast überall verschwindet.*

**Beweis:** Die erste Behauptung folgt nach (1.4), weil  $f$  fast überall punktweiser Limes von Treppenfunktionen ist. Auch  $|f|$  ist integrierbar, und wir dürfen nach (1.4) annehmen, daß  $|f|$  Limes einer aufsteigenden Folge  $(\varphi_n)$  von nirgends negativen Stufenfunktionen ist. Dies sind Treppenfunktionen. Es ist ja  $|f|$  außerhalb einer Menge  $Z$  vom Maß  $\mu(Z) < 1$  gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen, und wäre  $\varphi_n = c > 0$  auf einer Menge  $M$  vom Maß  $\mu(M) = \infty$ , so wäre schließlich eine Treppenfunktion auf  $M \setminus Z$  größer als  $c/2$ , was wegen  $\mu(M \setminus Z) = \infty$  nicht sein kann. Ist nun  $\|f\|_1 = 0$ , so  $\int \varphi_n d\mu \leq \int |f| = 0$ , also  $\mu\{\varphi_n > 0\} = 0$ , also  $\mu\{f > 0\} = \mu \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n > 0\} = 0$ . Die Umkehrung ist trivial.  $\square$

Wir entnehmen dem Beweis die

**(3.9) Bemerkung.** *Ist  $f$  integrierbar,  $\varphi$  eine Stufenfunktion und  $0 \leq \varphi \leq f$ , so ist  $\varphi$  eine Treppenfunktion. Insbesondere ist  $f$  fast überall der punktweise Limes einer aufsteigenden Folge von Treppenfunktionen.*  $\square$

Und nun schließen wir den Weg zur Konstruktion des Integrals, indem wir auf den Anfang zurückkommen.

**(3.10) Normkonvergenzsatz.** Sei  $(f_n)$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge integrierbarer Funktionen, dann gilt:

- (i) Es gibt eine fast überall punktweise konvergente Teilfolge, die außerhalb einer Teilmenge von beliebig kleinem Maß gleichmäßig konvergiert.
- (ii) Je zwei solche Grenzfunktionen stimmen fast überall überein und sind integrierbar.
- (iii) Ist  $f$  eine solche Grenzfunktion, so folgt  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ , also  $(f_n) \rightarrow f$  für die  $L^1$ -Norm, und insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

**Beweis** (i): Wörtlich derselbe wie für das Konstruktionslemma (3.4), bis auf die Feststellung, daß

$$Y_k = \{|f_{k+1} - f_k| \geq 2^{-k}\}$$

meßbar ist nach (3.8). Für (ii), (iii) beginnen wir mit der

**Vorbemerkung.** Ist die integrierbare Funktion  $g$  fast überall Limes einer  $L^1$ -Cauchyfolge  $(\varphi_n)$  von Treppenfunktionen, so folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - g\|_1 = 0,$$

denn nach Definition ist  $\|\varphi_n - g\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_k\|_1$ , und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_k\|_1 = 0$  nach der Cauchybedingung.

Nun zum Beweis, daß eine Grenzfunktion  $f$  integrierbar ist, dürfen wir annehmen:  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  punktweise, und gleichmäßig außerhalb einer Menge vom Maß  $< \varepsilon$ . Zu jedem  $n$  wähle eine Treppenfunktion  $\tau_n$  mit  $|f_n - \tau_n| < 1/n$  außerhalb einer Menge  $Z_n$  vom Maß  $\mu(Z_n) < 2^{-n}$ , und  $\|f_n - \tau_n\|_1 < 1/n$ . Das geht nach der Vorbemerkung mit  $f_n = g$ . Dann ist auch  $(\tau_n)$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge, denn

$$\|\tau_\ell - \tau_n\|_1 \leq \|\tau_\ell - f_\ell\|_1 + \|f_\ell - f_n\|_1 + \|f_n - \tau_n\|_1.$$

Auch konvergiert  $\tau_n$  fast überall gegen  $f$ , nämlich überall außerhalb von  $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} Z_n =: Z$ , und

$$\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} Z_n\right) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(Z_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 2 \cdot 2^{-k},$$

also  $\mu(Z) = 0$ , weil  $\mu(Z) \leq 2^{-k}$  für alle  $k$ . Damit ist  $f = \lim(\tau_n)$  integrierbar.

Nach der Vorüberlegung mit  $g = f$  folgt dann  $\|\tau_n - f\|_1 \rightarrow 0$ , und daher für die entsprechende Teilfolge  $(f_n)$  nach der Dreiecksungleichung auch  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ . Aber  $(f_n)$  ist eine  $L^1$ -Cauchyfolge, daher  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$  allgemein. Ist nun auch  $g$  fast überall Grenzfunktion einer weiteren Teilfolge von  $(f_n)$  nach (i), so folgt  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$  und  $\|f_n - g\|_1 \rightarrow 0$ , also  $\|f - g\|_1 = 0$ , also  $f = g$  fast überall nach (3.8).  $\square$

Jetzt haben wir den reellen Vektorraum  $\mathcal{L}(\mu)$  der integrierbaren Funktionen mit der  $L^1$ -Norm. Darin liegt der Unterraum  $\mathcal{N}(\mu)$  der **Nullfunktionen**, d.h. der Funktionen der  $L^1$ -Norm 0. Dies sind die Funktionen, die fast überall verschwinden. Nach (3.10, iii) ist der Raum  $\mathcal{L}(\mu)$  vollständig für die  $L^1$ -Norm, Cauchyfolgen konvergieren. Wir bilden den Quotienten

$$L^1(\mu) = \mathcal{L}(\mu)/\mathcal{N}(\mu)$$

und erhalten so einen vollständigen normierten Raum mit der induzierten  $L^1$ -Norm  $\|f\|_1$  für Funktionenklassen  $f \in L^1(\mu)$ , die wir aber ebenso bezeichnen, wie ihre Repräsentanten in  $\mathcal{L}(\mu)$ . Also  $L^1(\mu)$  ist ein Banachraum, und die Elemente haben wir (bis auf Vieldeutigkeit auf einer Nullmenge) wieder als Funktionen beschrieben. Eine Warnung jedoch: Für  $f \in L^1(\mu)$  hat  $f(p)$  im allgemeinen keinen Sinn, wenn nämlich  $\mu\{p\} = 0$ . Die  $L^1$ -Konvergenz bezeichnen wir durch

$$L^1\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n) = f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

## § 4. Konvergenzsätze

Das Lebesgueintegral ist unter ziemlich schwachen Voraussetzungen mit Grenzwertbildung vertauschbar. Das ist ein großer Vorzug dieses Integrals.

**(4.1) Satz über monotone Konvergenz** (*Beppo Levi*). Sei  $(f_n)$  eine fast überall monoton steigende Folge integrierbarer Funktionen, und die Folge der Integrale  $(\int_X f_n d\mu)$  sei beschränkt. Dann konvergiert  $(f_n)$  fast überall gegen eine integrierbare Funktion  $f = L^1\text{-lim}(f_n)$ , und insbesondere

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

**Beweis:** Nach dem Normkonvergenzsatz genügt zu zeigen, daß  $(f_n)$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge ist. Nun, für  $\varepsilon > 0$  und  $k \geq n$  ist

$$\|f_k - f_n\|_1 = \int (f_k - f_n) d\mu = \int f_k d\mu - \int f_n d\mu < \varepsilon$$

für genügend große  $n$ , weil die Folge  $(\int f_n d\mu)$  monoton und beschränkt, also eine Cauchyfolge ist.  $\square$

Man sagt, eine Funktion  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  **dominiert** eine Folge von Funktionen  $(f_n \mid n \in \mathbb{N})$ , wenn  $|f_n(x)| \leq g(x)$  für alle  $n$  und fast alle  $x \in X$  gilt.

**(4.2) Satz über dominierte Konvergenz** (*Lebesgue*). Die Folge  $(f_n)$  integrierbarer Funktionen sei von der integrierbaren Funktion  $g$  dominiert, und  $(f_n)$  konvergiere fast überall gegen  $f$ . Dann ist  $f$  integrierbar und  $L^1\text{-lim}(f_n) = f$ . Insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

**Beweis:** Nach dem Normkonvergenzsatz genügt zu zeigen, daß  $(f_n)$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge ist. Wir dürfen annehmen, daß  $(f_n)$  überall

punktweise gegen  $f$  konvergiert und  $|f_n| \leq g$  überall gilt. Für  $k \geq 1$  bilde die Hilfsfunktion

$$h_k(x) = \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| \mid n, m \geq k\} \leq 2g(x).$$

**Behauptung.** Die Funktionen  $h_k$  sind integrierbar.

In der Tat, sei  $n, m \geq k$ ; jede Funktion  $|f_n - f_m|$  ist integrierbar, also auch  $\max\{|f_n - f_m| \mid n, m \leq \ell\} = v_\ell$ , und weil die Folge  $(v_\ell)$  monoton steigt und von  $2g$  dominiert ist, ist auch ihr Supremum integrierbar nach dem Satz über monotone Konvergenz. Das zeigt die Behauptung.

Nun bildet  $(h_k)$  eine monoton fallende Folge integrierbarer Funktionen, und sie konvergiert punktweise gegen Null. Wieder nach dem Satz über monotone Konvergenz ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int h_k d\mu = 0.$$

Ist also  $\varepsilon > 0$  und  $k$  genügend groß, so ist

$$\|f_n - f_k\|_1 = \int |f_n - f_k| d\mu \leq \int h_k d\mu < \varepsilon. \quad \square$$

Durch die Konvergenzsätze gewinnen wir nun eine etwas bessere Vorstellung über die Gesamtheit der integrierbaren Funktionen. Wir beginnen mit einem Grundvorrat von Funktionen, von denen wir wissen, daß sie integrierbar sind. Auf dem  $\mathbb{R}^n$  sind das die stetigen Funktionen, die außerhalb eines Kompaktums verschwinden, und natürlich Treppenfunktionen. Von diesen ausgehend gewinnt man weitere als Grenzfunktionen nach den Konvergenzsätzen.

Über das Riemannintegral im Höherdimensionalen haben wir nie genauer geredet. Es ginge ähnlich wie im Eindimensionalen.

**(4.3) Bemerkung.** Riemann-integrierbare Funktionen sind Lebesgue-integrierbar, und beide Integrale sind in diesem Fall gleich.

**Beweis:** Das Lebesgueintegral erfüllt die Integralaxiome (Bd. 1, III, §1). Man muß also nur zeigen, daß Riemann-integrierbare Funktionen

überhaupt Lebesgue-integrabel sind. Ist  $f$  Riemann-integrabel, so hat man eine aufsteigende Folge  $(\varphi_n)$  und eine absteigende Folge  $(\psi_n)$  von Treppenfunktionen, mit

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n, \text{ und } (\|\psi_n - \varphi_n\|_1) \rightarrow 0.$$

Punktweise konvergiert  $(\varphi_n) \rightarrow \varphi$  und  $(\psi_n) \rightarrow \psi$ , und nach dem Satz über monotone Konvergenz sind  $\varphi$  und  $\psi$  integrabel. Dann ist  $\varphi \leq f \leq \psi$  und  $\|\psi - \varphi\|_1 = 0$ , also fast überall  $\varphi = f = \psi$ , und  $f$  ist integrabel.  $\square$

Das Lebesgueintegral existiert für viel mehr Funktionen, als das Riemannintegral. Zum Beispiel die charakteristische Funktion von  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  hat das Lebesgueintegral 0 und kein Riemannintegral. Das ist noch nicht sehr bemerkenswert, weil dies nur eine Nullfunktion ist; nach denen will man ja sowieso faktorisieren. Ein besseres Beispiel erhält man wie folgt: Sei  $Q = \mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  und sei  $U_n$  ein offenes Intervall in  $(0, 1)$  um  $q_n$  der Länge höchstens  $\varepsilon/2^n$  mit  $\varepsilon < 1$ . Dann haben wir

$$Q \subset U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subset (0, 1), \quad \mu(U) \leq \varepsilon.$$

Sei  $f$  die charakteristische Funktion von  $U$ . Dann ist  $f$  punktweise und für die  $L^1$ -Norm der Limes der monotonen Folge  $(f_n)$  der Riemann-integrablen charakteristischen Funktionen von  $U_1 \cup \dots \cup U_n$ , aber  $f$  kann auch nach Abänderung um eine Nullfunktion nicht Riemann-integrabel werden. Die Menge  $U$  ist ja offen und dicht und bleibt dicht, wenn man eine Nullmenge herausnimmt, denn da darf man kein Intervall ganz herausnehmen. Also auch nach Abänderung von  $f$  um eine Nullfunktion bleibt das Riemann-Oberintegral stets mindestens 1, während doch das Lebesgueintegral höchstens  $\varepsilon$  ist.

**(4.4) Ausschöpfungssatz.** Sei  $(M_n)$  eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen, und auf  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$  sei eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann ist  $f$  genau dann über  $M$  integrabel, wenn  $f$  über

jedem  $M_n$  integabel ist und die Folge  $(\int_{M_n} |f| d\mu)$  konvergiert. Ist das der Fall, so ist

$$\int_M f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{M_n} f d\mu.$$

**Beweis:** Ist  $f$  über  $M$  integabel, so auch  $f$  und  $|f|$  über jedem  $M_n$ , und alle Integrale sind durch  $\int_M |f| d\mu$  beschränkt, also konvergiert  $(\int_{M_n} |f| d\mu)$ . Nun zur interessanten Umkehrung: Die Folgen  $(\chi_{M_n} \cdot f)$  und  $(\chi_{M_n} \cdot |f|)$  konvergieren punktweise gegen  $\chi_M \cdot f$  bzw.  $\chi_M \cdot |f|$ . Wenn nun die Folge der Integrale  $(\int_{M_n} |f| d\mu)$  beschränkt bleibt, ist nach dem Satz über monotone Konvergenz  $\chi_M \cdot |f|$  integabel und nach dem Satz über dominierte Konvergenz auch  $\chi_M \cdot f$ , und die Integralformel gilt.  $\square$

**(4.5) Beispiel.** Ist  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  integabel auf jedem kompakten Teilintervall (z.B. stetig), so ist  $f$  genau dann Lebesgue-integabel, wenn das uneigentliche Integral  $\int_a^b |f(x)| dx$  konvergiert.

Zum Beweis schöpfe man  $(a, b)$  durch die  $M_j = [a + 1/j, b - 1/j]$  aus.  $\square$

Das uneigentliche Integral ist hier wie für das Riemannintegral definiert.

Hat man ein Integral für Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , so kann man damit das Integral für Abbildungen

$$f = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

einfach komponentenweise erklären:

$$(4.6) \quad \int_X f d\mu := \left( \int_X f_1 d\mu, \dots, \int_X f_n d\mu \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist mit linearen Abbildungen

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad y \mapsto Ay, \quad (Ay)_i = \sum_j a_{ij} y_j,$$

verträglich, also

$$A \int_X f \, d\mu = \int_X Af \, d\mu,$$

denn das Integral ist linear; es steht ja da:

$$\sum_j a_{ij} \int_X f_j \, d\mu = \int_X \sum_j a_{ij} f_j \, d\mu.$$

Daher ist mit (4.6) das Integral auch wohldefiniert für Abbildungen  $f : X \rightarrow V$  in einen endlichdimensionalen Vektorraum  $V$ . Man führt Basen ein, das Ergebnis ist davon unabhängig. Das hilft zum Beispiel für  $V = \mathbb{C}$ . Tatsächlich sind aber die zentralen Beweise bisher so gefaßt, daß  $V$  auch ein Banachraum sein darf, oder noch Allgemeineres — aber wir wollens nicht übertreiben. Der Satz über monotone Konvergenz setzt natürlich die Anordnung in  $\mathbb{R}$  voraus; er ist nur für Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}$  sinnvoll.

Konvergenzsätze sind Stetigkeitssätze, sie führen zu Aussagen über Parameterabhängigkeit von Integralen, die wesentlich stärker sind, als unsere früheren vorläufigen Feststellungen.

**(4.7) Satz** (über Parameterabhängigkeit von Integralen). Sei  $X$  ein Maßraum und  $p$  ein Punkt in einer offenen Menge  $U$  in  $\mathbb{R}^n$ . Es sei eine Funktion

$$f : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben, und für jedes  $u \in U$  sei die Funktion

$$f_u : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x, u)$$

integrierbar. Das Integral definiert die Funktion

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_X f_u \, d\mu =: \int_X f(x, u) \, dx.$$

- (i) Angenommen alle Funktionen  $u \mapsto f(x, u)$ ,  $x \in X$ , sind stetig bei  $p$ , und es existiert eine integrierbare Funktion  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$|f(x, u)| \leq h(x) \quad \text{für alle } (x, u) \in X \times U.$$

Dann ist  $g$  stetig bei  $p$ .

- (ii) Angenommen alle Funktionen  $u \mapsto f(x, u)$ ,  $x \in X$  haben stetige partielle Ableitungen  $D_j f(x, u)$  nach der  $j$ -ten Koordinate in  $\mathbb{R}^n$  und es existiert eine integrable Funktion  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$|D_j f(x, u)| \leq h(x) \quad \text{für alle } (x, u) \in X \times U.$$

Dann existiert  $D_j g$ , ist stetig, und

$$D_j g(p) = \int_X D_j f(x, p) dx.$$

**Beweis:** (i) folgt unmittelbar aus dem Satz über dominierte Konvergenz, weil in  $U$  Stetigkeit dasselbe wie Folgenstetigkeit ist.

(ii) folgt mit dem Mittelwertsatz:

$$\frac{g(p + te_j) - g(p)}{t} = \int_X D_j f(x, p + \vartheta te_j) dx.$$

Die rechte Seite konvergiert für  $t \rightarrow 0$  nach (i) gegen  $\int_X D_j f(x, p) dx$ .

□

So lang der Satz ist, er ist in dieser Form in vielen typischen Fällen der Analysis noch gar nicht anwendbar. Man verlangt ja in (i), daß für jede Folge  $(u_n) \rightarrow p$  in  $U$  die Folge der Funktionen  $(f(x, u_n))$  auf  $X$  punktweise gegen  $f(x, p)$  konvergiert. Es genügt, daß das fast überall gilt, außerhalb einer von der Folge abhängenden Nullmenge in  $X$ . Wir wollen nicht versuchen, allen Eventualitäten in einem noch längeren Satz zu genügen, es kommt nur darauf an zu verstehen, was die Konvergenzsätze leisten.

## § 5. Das Integral nichtnegativer Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir einen Maßraum  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ , und alle betrachteten Funktionen sind meßbare Funktionen

$$f : X \rightarrow [0, \infty].$$

Diesen Funktionen kann man stets sinnvoll ein Integral

$$\int f d\mu \in [0, \infty]$$

zuordnen. Es geht nur darum, in angemessener Weise mit dem Wert  $\infty$  umzugehen. Ist zunächst  $\varphi : X \rightarrow [0, \infty]$  eine Stufenfunktion, so setzen wir

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{c \in \mathbb{R}} c \cdot \mu\{\varphi = c\},$$

wie es nahelegt; dies ist eine endliche Summe.

Für beliebige meßbare Funktionen  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  ist dann

$$(5.1) \quad \int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu \mid 0 \leq \varphi \leq f \right\} \in [0, \infty],$$

wobei das Supremum über alle Stufenfunktionen unter  $f$  gebildet wird. Diese Erklärung erlaubt ganz allgemein, Maße durch Integrale zu erklären:

$$\mu(M) = \int_X \chi_M d\mu,$$

und darin liegt ihr Nutzen. Die Regeln (3.6), soweit sinnvoll, lassen sich übertragen.

Man kann in (5.1) eine Folge  $(\varphi_n)$  von Stufenfunktionen wählen, soda  $0 \leq \varphi_n \leq f$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n d\mu = \int f d\mu,$$

und zwar eine aufsteigende Folge,  $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ , ersetze nur  $\varphi_n$  durch  $\max\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ . Auch kann man die Folge  $(\varphi_n)$  so wählen, daß sie punktweise gegen  $f$  konvergiert: Wähle nach (III, 1.4) eine aufsteigende Folge  $(\psi_n)$  von Stufenfunktionen, die punktweise gegen  $f$  konvergiert, und ersetze  $\varphi_n$  durch  $\max\{\varphi_n, \psi_n\}$ .

**(5.2) Bemerkung.** *Das Integral (5.1) ist genau dann endlich, wenn  $f$  fast überall endlich und nach § 3 dort integrabel ist, und in diesem Fall stimmen beide Integrale überein.*

**Beweis:** Ist  $f$  nach § 3 integrierbar, so sind die Stufenfunktionen  $\varphi_n$  der eben beschriebenen Folge alle Treppenfunktionen, und nach dem Satz über monotone Konvergenz gilt  $\int \varphi_n d\mu \rightarrow \int f d\mu \in \mathbb{R}$ , also gilt die Behauptung. Ist umgekehrt das Integral (5.1) endlich, so ist insbesondere  $f$  fast überall endlich, und wir dürfen annehmen, überall. Dann sind wieder alle  $\varphi_n$  Treppenfunktionen, und die Behauptung folgt nach dem Satz über monotone Konvergenz.  $\square$

Der Satz über monotone Konvergenz überträgt sich wie folgt:

**(5.3) Satz.** Sei  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  eine aufsteigende Folge meßbarer Funktionen mit Supremum  $f$ , dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

**Beweis:** Ist die linke Seite endlich, so sind alle  $f_n$  nach eventueller Abänderung auf einer Nullmenge endlich, und die Behauptung folgt nach dem Satz über monotone Konvergenz. Ist aber die Folge  $\int f_n d\mu$  unbeschränkt, so ist ja  $\int f d\mu \geq \int f_n d\mu$  für jedes  $n$ , also ist  $\int f d\mu = \infty$ .  $\square$

Nach wie vor heißt auch eine nicht negative Funktion nur dann **integrierbar**, wenn ihr Integral **endlich** ist.

Man kann den Zugang zur Integralkonstruktion wie in diesem Abschnitt nehmen, indem man eine beliebige reelle Funktion kanonisch in nicht negative zerlegt:

$$f = f_+ - f_- .$$

Aber eigentlich ist das eher ein Hintereingang. Allemal ist die Integralkonstruktion erst mit dem Normkonvergenzsatz am Ziel. Er zeigt, da das Lebesgueintegral nicht nur gut ist, und besser als zum Beispiel das Riemannintegral, sondern vollendet: Der Raum  $L^1(\mu)$  ist vollständig.