
Kapitel III

Singularitäten und Integrale

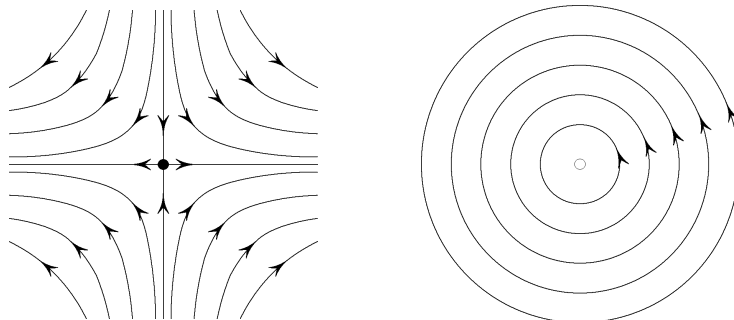
Du erinnerst Dich, liebes Herz, daß wir zu der Zeit, als unsere Freundschaft eine innigere geworden war, sodaß ich zuweilen das Bedürfnis empfand, auch über Arbeiten, die ich gern machen möchte, mit Dir zu reden und wir uns auch wohl in wissenschaftliche Träume und Phantasien verloren, oftmals von den Bedingungen der Stabilität des Weltsystems gesprochen haben.

Weierstraß

In diesem Kapitel werfen wir vor allem einen Blick auf das Verhalten der Lösungen in der Umgebung eines Punktes. Dies ist heute ein reichhaltiges Gebiet, das durch neue Methoden der Differentialrechnung sehr gefördert worden ist, aber wir erklären hier nur einen klassischen Begriff der Stabilität. In diesem Zusammenhang soll auch von ersten Integralen, das sind Erhaltungsgrößen, einer Differentialgleichung die Rede sein, und wir zeigen die typischen Singularitäten einer impliziten Differentialgleichung.

§ 1. Stabilität

Sei v ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf M und p ein singulärer Punkt von v . Dann ist der Punkt, oder genauer gesagt, die konstante Funktion $t \mapsto p$, eine Integralkurve von v , zeitlich gedeutet eine Ruhelage. Angenommen nun, eine Lösung α startet in der Nähe von p , so fragen wir, ob $\alpha(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen p konvergiert, oder sich von p entfernt, oder beides nicht?



Es gibt da viele Begriffe, um das sehr komplizierte Rückkehrverhalten der Integralkurven zu beschreiben, und es sei hier nur der folgende besprochen:

Ein singulärer Punkt p eines Vektorfeldes heißt **asymptotisch stabil** (kurz **stabil**), wenn es in jeder Umgebung von p eine vielleicht kleinere Umgebung U von p gibt, so daß für jede Integralkurve α gilt: Ist $\alpha(0) \in U$, so ist $\alpha(t)$ für alle $t > 0$ definiert, $\alpha(t) \in U$, und $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = p$.

Es würde genügen, daß U eine Umgebung V enthält, so daß für die α mit $\alpha(0) \in V$ gilt: $\alpha(t) \rightarrow p$ in U . Man kann dann U durch die Umgebung $\Phi(V \times [0, \infty))$ ersetzen, die unter Φ_t für $t \geq 0$ invariant bleibt.

Wie erkennt man die Stabilität eines singulären Punktes — eines **Gleichgewichts**, wie man auch sagt? Eine klassische Methode ist die folgende:

Eine **Ljapunof-Funktion** für den singulären Punkt p von v ist eine in einer Umgebung V von p definierte C^1 -Funktion

$$u : V \rightarrow \mathbb{R},$$

so daß $u \geq 0$, $u(x) = 0$ genau wenn $x = p$, und

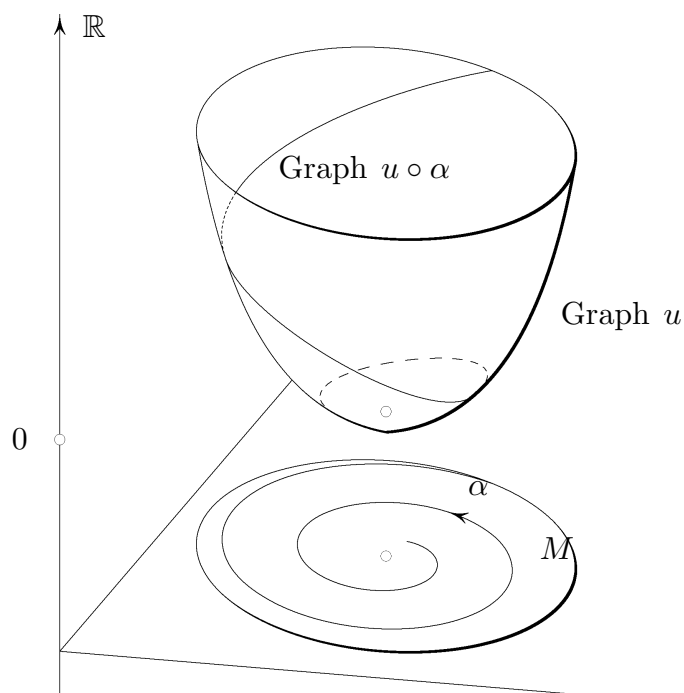
$$\langle \text{grad } u, v \rangle < 0 \quad \text{auf } V \setminus \{p\}.$$

Die entscheidende letzte Bedingung bedeutet, wie wir wissen, daß die Ableitung von u in Richtung v negativ ist, also

$$D_v u < 0, \quad \text{oder} \quad d/dt(u \circ \alpha) < 0$$

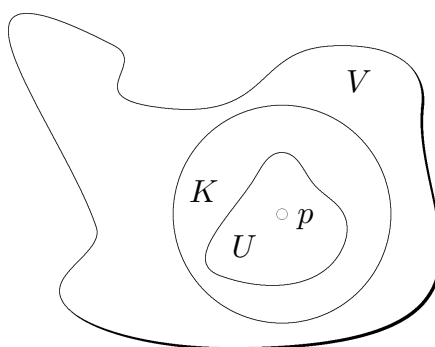
für jede Integralkurve α . Diese letztere Bedingung ist offenbar unabhängig vom (etwa auch krummlinig) gewählten Koordinatensystem auf M .

(1.1) Satz (Ljapunof). *Gibt es zu der Singularität p eines C^1 -Vektorfeldes v eine Ljapunof-Funktion, so ist p stabil.*



Beweis: Wir wählen eine kompakte Kugel K um p im Definitionsgebiet V der Ljapunof-Funktion u . Auf dem Rand ∂K von K nimmt u ein Minimum 2ε an, und wir setzen

$$U = \{x \in K \mid u(x) \leq \varepsilon\}.$$



Dann ist U kompakt und liegt im Inneren von K , denn auf dem Rand ist $u \geq 2\varepsilon$. Angenommen, α ist eine Integralkurve, und $\alpha(0) \in U$, so ist $\alpha(t) \in U$ für alle t , denn solange $\alpha(t) \in V$ ist, gilt $(u \circ \alpha)' < 0$, also nimmt $u \circ \alpha$ monoton ab. Ist also $u \circ \alpha(0) \leq \varepsilon$, so bleibt $u \circ \alpha \leq \varepsilon$ auf der maximalen Lösung in V . Dann bleibt aber $\alpha(t) \in K$ also $\alpha(t) \in U$, weil $u \geq 2\varepsilon$ auf ∂K . Damit folgt, daß $\alpha(t)$ für alle $t \geq 0$ definiert ist. Wir zeigen nun $\lim_{t \rightarrow \infty} u \circ \alpha(t) = 0$, und daraus folgt der Satz, denn wäre nicht $\lim \alpha(t) = p$, so gäbe es eine Folge $t_n \rightarrow \infty$, $\alpha(t_n) \rightarrow q \neq p$, und daher $u \circ \alpha(t_n) \rightarrow u(q) \neq 0$.

Nun $(u \circ \alpha)' < 0$, also fällt $u \circ \alpha$ monoton, und es könnte allenfalls gelten $u \circ \alpha(t) \rightarrow a > 0$, und dann wäre $u \circ \alpha \geq a$. Wählt man δ so klein, daß $u(x) < a$ für $|x - p| < \delta$, so wäre stets $|\alpha(t) - p| \geq \delta$. Aber auf $U \cap \{x \mid |x - p| \geq \delta\}$ ist $\langle \text{grad } u, v \rangle < \kappa < 0$, also wäre stets

$(u \circ \alpha)' < \kappa$, und es müßte nach endlicher Zeit $u \circ \alpha(t) = 0$ sein: ein Widerspruch. Also $u \circ \alpha(t) \rightarrow 0$. \square

Als typisches Beispiel, nach dem die Idee der Ljapunof-Funktion eigentlich modelliert ist, betrachten wir

(1.2) Das Gradientensystem. Eine C^2 -Funktion $u : V \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $u \geq 0$, $u(p) = 0$ und $\text{grad } u \neq 0$ auf $V \setminus \{p\}$, gibt selbst stets Anlaß zu dem Gradientenfeld

$$v(x) = -\text{grad } u(x).$$

Dieses Feld hat das Minimum p von u als stabilen Attraktor: Wenn man immer bergab geht, landet man im Tal. Die Bedingung für eine Ljapunof-Funktion ist offenbar erfüllt:

$$\langle \text{grad } u, v \rangle = -\langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle < 0 \quad \text{außerhalb } p.$$

Übrigens kann man ebenso beschreiben, wann alle Integralkurven, die nahe an p starten, sich von p entfernen, wann also der Punkt p abstoßend ist. Eine notwendige Bedingung erhält man, wenn man in der Definition der Ljapunof-Funktion verlangt $\langle \text{grad } u, v \rangle > 0$ statt $\langle \text{grad } u, v \rangle < 0$.

In diesem Sinne kann man über die Stabilität des Ursprungs für eine lineare Differentialgleichung vollkommen Auskunft erhalten — das kann man auch direkt aus der expliziten Lösung, aber die Ljapunof-Funktion gibt zugleich über ein Vektorfeld Auskunft, das im singulären Punkt eine stabile lineare Approximation hat. Als zweite Anwendung betrachten wir also

(1.3) Lineare Differentialgleichungen.

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad A \text{ konstant.}$$

Wir untersuchen die Stabilität des Ursprungs $0 \in \mathbb{C}^n$. Wir denken uns A in Jordanform transformiert, also

$$A = D + N, \quad DN = ND, \quad D \text{ Diagonalmatrix, } N \text{ nilpotent.}$$

In der Diagonale von D stehen die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, und N läßt sich noch auf die Gestalt

$$N : e_j \mapsto e_{j-1} \quad \text{oder} \quad e_j \mapsto 0$$

bringen. Ersetzt man e_j durch den neuen Basisvektor $a_j = \varepsilon^j e_j$ für ein $\varepsilon \neq 0$, so bleibt die Gestalt von D ungeändert, und die lineare Abbildung N bildet die a_j so ab:

$$N : a_j = \varepsilon^j e_j \mapsto 0 \quad \text{oder} \quad a_j \mapsto \varepsilon^j e_{j-1} = \varepsilon a_{j-1}.$$

Also hat N als Matrix bezüglich der Basis a_1, \dots, a_n obere Dreiecksgestalt, und nur die Komponenten 0 oder ε . Wir können also feststellen:

(1.4) Bemerkung. Eine quadratische komplexe Matrix A läßt sich auf die folgende Gestalt transformieren:

$$B^{-1}AB = D + N, \quad DN = ND, \quad |N| < \varepsilon,$$

mit einer Diagonalmatrix D , dem halbeinfachen Teil, und einer nilpotenten Matrix N . \square

(1.5) Satz. Haben alle Eigenwerte der Matrix $A \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ negative Realteile, so ist der Ursprung ein stabiles Gleichgewicht des Vektorfeldes $\dot{z} = Az$.

Beweis: Wir wählen eine Basis in \mathbb{C}^n , so daß sich A darstellt wie in der Bemerkung, und ε so klein ist, wie wir noch sagen werden. Bezüglich dieser Basis hat man auf $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ die **reelle** quadratische Form

$$\langle z, w \rangle := \text{Re} \sum_{\nu=1}^n z_{\nu} \bar{w}_{\nu},$$

und diese ist offenbar positiv definit, $\sum_{\nu=1}^n z_{\nu} \bar{z}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^n |z_{\nu}|^2 > 0$, außer wenn $z = 0$.

Auch ist die kanonische Basis der Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ orthonormal für dieses Skalarprodukt. Unsere Ljapunof-Funktion ist

$$u(z) = \langle z, z \rangle = \sum_{\nu=1}^n |z_{\nu}|^2 = \sum_{\nu=1}^n x_{\nu}^2 + y_{\nu}^2, \quad \text{für } z_{\nu} = x_{\nu} + iy_{\nu}.$$

Für die gewählten Basen ist

$$\text{grad } u = 2(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = 2z, \quad \text{also } \langle \text{grad } u, v \rangle = 2\langle z, Az \rangle.$$

Nehmen wir nun zunächst einmal vereinfachend an, die Basisvektoren wären Eigenvektoren, also der nilpotente Teil N verschwinde. Dann ist

$$\langle \text{grad } u, v \rangle = 2\langle z, Dz \rangle = 2\text{Re} \sum_{\nu=1}^n \bar{\lambda}_{\nu} z_{\nu} \bar{z}_{\nu} = 2 \sum_{\nu=1}^n (\text{Re } \lambda_{\nu}) \cdot |z_{\nu}|^2$$

und ist $\min\{|\text{Re } \lambda_{\nu}|\} = \mu$, so ist letzteres kleinergleich $-2\mu|z|^2$. In diesem Fall sind wir also fertig, und in der Tat ist die Funktion

$$z \mapsto 2\langle z, Dz \rangle$$

auf der Sphäre $\{z \mid |z| = 1\}$ stets kleinergleich -2μ . Kehren wir nun zum allgemeinen Fall zurück und ist $|N| < \mu/2$, so ist die Funktion

$$z \mapsto 2\langle z, Az \rangle = 2\langle z, Dz \rangle + 2\langle z, Nz \rangle$$

für $|z| = 1$ stets kleiner als $-\mu$, denn

$$|2\langle z, Nz \rangle| \leq 2|z| \cdot |N| \cdot |z| = 2|N| < \mu.$$

Also ist

$$\langle \text{grad } u(z), v(z) \rangle = 2\langle z, Az \rangle < 0 \quad \text{für } z \neq 0,$$

was zu zeigen war. □

Der letzte Gedanke hilft auch in dem allgemeineren Fall, wo die Matrix A die Jacobische eines Vektorfeldes in einem singulären Punkt ist.

(1.6) Satz. *Sei p ein singulärer Punkt des C^1 -Vektorfeldes v , und die Jacobische*

$$A = Dv(p)$$

habe nur Eigenwerte mit negativen Realteilen. Dann ist der singuläre Punkt stabil.

Beweis: Wir dürfen $p = 0$ annehmen, und wir schreiben $v(x) = A(x) \cdot x$, mit einer stetig von x abhängenden Matrix, so daß $A(0) = A$. Zur Matrix A wählen wir die Basis und Ljapunof-Funktion auf \mathbb{C}^n , wie im Beweis von (1.5). Damit sind diese Funktionen auch auf \mathbb{R}^n definiert, das jetzt \mathbb{R} -linear, aber sehr schief in \mathbb{C}^n liegen mag.

Jedenfalls ist dann — alles in den gewählten Koordinaten berechnet:

$$\langle \text{grad } u(x), v(x) \rangle = 2\langle x, A(x) \cdot x \rangle,$$

und wir wissen $2\langle z, Az \rangle < -\mu$ für $|z| = 1$. Also aus Stetigkeit gilt für ein $\delta > 0$ und $|x| < \delta$ und $|z| = 1$

$$2\langle z, A(x) \cdot z \rangle < -\mu/2.$$

Insbesondere also für $x \neq 0$, $|x| < \delta$ haben wir $2\langle x/|x|, A(x) \cdot x/|x| \rangle < -\mu/2$, und schließlich, was zu zeigen war:

$$2\langle x, A(x) \cdot x \rangle < -|x|^2 \mu/2 < 0. \quad \square$$

Die Lösungen der linearen Vektorfelder kann man ja explizit aufschreiben, die Gleichung $\dot{x} = Ax$ hat das Fundamentalsystem

$$t \mapsto e^{At},$$

und es gilt:

(1.7) Satz. *Haben alle Eigenwerte von A einen Realteil, der kleiner ist als $-\mu < 0$, so ist $|e^{At}| \leq \beta e^{-\mu t}$, $t \geq 0$, für eine Konstante β .*

Beweis: Wir wählen eine Transformation B , so daß

$$BAB^{-1} = D + N, \quad DN = ND,$$

mit einer Diagonalmatrix D und $|N| < \varepsilon$, wobei alle Eigenwerte von A einen Realteil kleiner oder gleich $-(\mu + \varepsilon)$ haben. Dann ist

$$|e^{(D+N)t}| \leq |e^{Dt}| \cdot |e^{Nt}| \leq e^{-(\mu+\varepsilon)t} \cdot e^{\varepsilon t} = e^{-\mu t},$$

also

$$|e^{At}| = |B^{-1}e^{(D+N)t}B| \leq |B| \cdot |B^{-1}| \cdot e^{-\mu t}. \quad \square$$

(1.8) Folgerung. *Haben die Eigenwerte von A einen Realteil größer $\mu > 0$, so gibt es eine Konstante $\beta > 0$ mit*

$$|e^{At} \cdot v| \geq \beta^{-1} \cdot e^{\mu t} \cdot |v| \quad \text{für } t \geq 0.$$

Beweis: Wir wenden den Satz auf $-A$ an, und wählen auch β nach dem Satz für $-A$. Wäre die Folgerung falsch, so wäre für ein v, t erfüllt:

$$|v| = |e^{-At}(e^{At}v)| \leq \beta e^{-\mu t} |e^{At}v| < \beta \beta^{-1} e^{-\mu t} e^{\mu t} |v| = |v|,$$

ein Widerspruch. □

Hat schließlich A nur rein imaginäre Eigenwerte, so stehen in der Diagonale von e^{At} nach Transformation auf Jordanform nur komplexe Zahlen $e^{i\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, vom Betrag 1, so daß e^{At} weder gegen Null, noch gegen ∞ geht, dafür aber das früher schon beschriebene ergodische Verhalten des Flusses mit großer Wahrscheinlichkeit auftritt. Im ganzen kann man folgendes sagen:

Man kann eine beliebige Matrix A auf Jordanform transformieren, und damit insbesondere eine lineare Zerlegung

$$\mathbb{C}^n = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3, \quad A(U_\nu) \subset U_\nu,$$

wählen, so daß für die Einschränkungen

$$A_\nu := A|_{U_\nu} : U_\nu \rightarrow U_\nu$$

gilt: Die Realteile von A_1 sind negativ, die von A_2 positiv, die von A_3 Null. Der Fluß $\Phi_t = e^{At}$ zerfällt entsprechend in die Komponenten

$$\Phi_t^\nu = e^{A_\nu t} : U_\nu \rightarrow U_\nu,$$

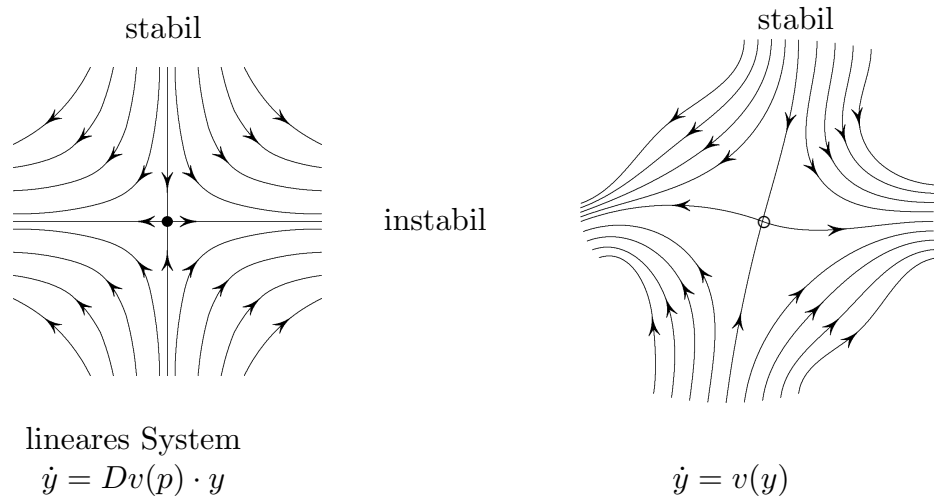
und die Flußlinien konvergieren gegen Null auf U_1 , gegen ∞ auf U_2 und beides nicht auf U_3 . Wenn der nilpotente Teil von A_3 verschwindet, kann man eine euklidische Norm so wählen, daß $|\Phi_t^3 v| = |v|$. Nur Φ^3 hat zyklische Orbits. Den Raum U_1 nennt man die **stabile Mannigfaltigkeit** und den Raum U_2 die **instabile Mannigfaltigkeit** des Flusses für die Singularität im Ursprung.

Im Fall einer reellen Matrix A entspricht der komplexen Zerlegung $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ die reelle Zerlegung

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

mit $V_\nu = \mathbb{R}^n \cap U_\nu$. Als Basisvektoren von V_ν kann man Real- und Imaginärteil der Basisvektoren von U_ν wählen.

Und allgemein kann man wieder sagen: Hat ein (hinreichend oft differenzierbares) Vektorfeld v eine isolierte Singularität in p , und ist $A = Dv(p)$ eine Matrix mit nicht verschwindenden Realteilen der Eigenwerte, so sieht der Fluß in geeigneten (aber nur homöomorphen, nicht diffeomorphen) Koordinaten lokal um p ebenso aus, wie der des zugehörigen linearen Systems — aber das ist nicht so leicht zu zeigen.



Die Ljapunofsche Methode ist jedoch nicht auf den Fall beschränkt, wo die lineare Approximation das Stabilitätsverhalten beherrscht.

Beispiel. Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - y + kx(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - ay + ky(x^2 + y^2), \quad a^2 < 1, \quad k < 0. \end{aligned}$$

Die Jacobische im Ursprung ist $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$, das charakteristische Polynom also $-(a - t)(a + t) + 1 = t^2 + 1 - a^2$ mit den Eigenwerten

$$\lambda = \pm i\sqrt{1 - a^2}.$$

Die lineare Singularität ist ein Wirbel, die Realteile der Eigenwerte verschwinden. Aber die Funktion

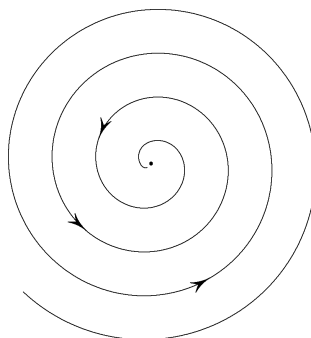
$$u(x, y) := x^2 - 2axy + y^2$$

ist eine Ljapunof-Funktion. Nämlich $u = (x - ay)^2 + (1 - a^2)y^2 > 0$, genau wenn $(x, y) \neq 0$,

und

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= 2(x - ay, y - ax), \quad \frac{1}{2} \langle \text{grad } u, v \rangle = (x - ay)(ax - y) + (x - ay)kx(x^2 + y^2) + \\ & (y - ax)(x - ay) + (y - ax)ky(x^2 + y^2) = k(x^2 + y^2)(x^2 - 2axy + y^2) = \\ & k(x^2 + y^2) \cdot u(x, y) < 0 \quad \text{für } (x, y) \neq 0. \end{aligned}$$

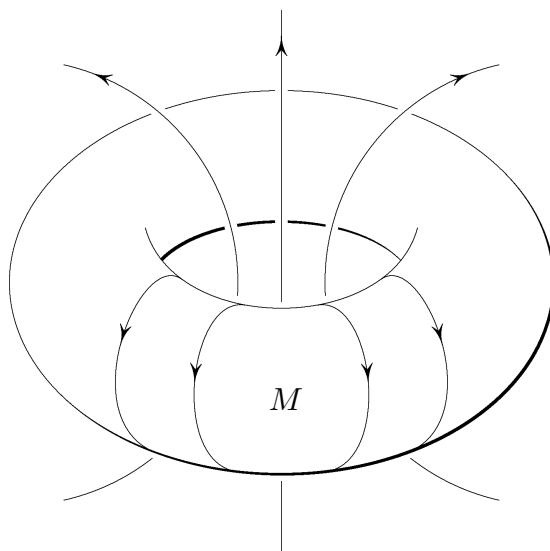
Das Bild ist also das einer Spirale, aber die Lösungen gehen langsamer gegen Null.



Wählt man dagegen $k > 0$, so zeigt dieselbe Funktion u , daß der Ursprung stabil für $t \rightarrow -\infty$ wird, also der Ursprung ist abstoßend. In diesem Fall kann man also aus der linearen Approximation über die Stabilität nichts schließen. Aber man findet noch eine Ljapunof-Funktion, die über die Stabilität Auskunft gibt.

§ 2. Integralmannigfaltigkeiten eines Vektorfeldes

Sei v ein Vektorfeld auf einer offenen Menge U in \mathbb{R}^n , und es existiere ein lokaler Fluß von v . Eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit $M \subset U$ heißt **Integralmannigfaltigkeit** von v , wenn das Vektorfeld v überall tangential zu M ist, also $v(p) \in T_p M$ für alle $p \in M$.



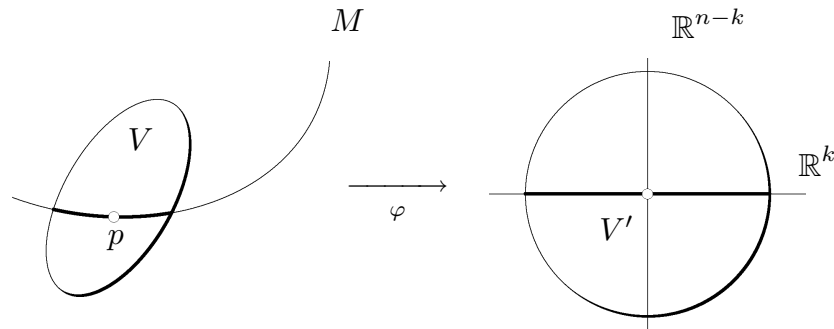
(2.1) Satz. *Ist M eine abgeschlossene Integralmannigfaltigkeit des Vektorfeldes v , so ist M invariant unter dem lokalen Fluß von v . Also wenn $\alpha(0) \in M$ für eine Integralkurve α , so ist $\alpha(t) \in M$ für alle t .*

Beweis: Sei α eine maximale Integralkurve von v , und sei $\alpha(0) \in M$. Wir setzen $\tau = \sup\{t \mid \alpha(s) \in M \text{ für } 0 \leq s \leq t\}$. Dann ist $\alpha(t) \in M$ für $0 \leq t < \tau$, also aus Stetigkeit $\alpha(\tau) \in M$, falls τ im Definitionsintervall von α liegt, weil M abgeschlossen ist. Aber wir zeigen in diesem Fall $\alpha(t) \in M$ für alle t aus einer Umgebung von τ , was ein Widerspruch zur Definition von τ ist.

Um $\alpha(\tau) = p \in M$ gibt es eine Karte

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad \varphi(M \cap V) = V' \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}.$$

Also $M \cap V = \{x \in V \mid \varphi_2(x) = 0\}$,



und der Tangentialraum von M für $x \in V$ ist

$$T_x M = \{u \in \mathbb{R}^n \mid D\varphi_2 \cdot u = 0\}.$$

Daß also das Feld v zu M tangential ist, heißt für $x \in V \cap M$:

$$D\varphi_2(x) \cdot v(x) = 0.$$

Beschreiben wir M und α und das Vektorfeld v also durch die Koordinaten der Karte φ , so haben wir die Integralkurve

$$\varphi \circ \alpha, \quad \text{mit} \quad \varphi \circ \alpha(\tau) = 0,$$

des Vektorfeldes

$$D\varphi \cdot v = (w_1, w_2), \quad w_2 \mid (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = 0,$$

und wir müssen zeigen, daß $\varphi \circ \alpha$ in $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ bleibt. Nun, das Vektorfeld $(w_1, 0)$ hat auch eine bei 0 startende Integralkurve β . Für sie verschwindet jedenfalls die zweite Komponente, sie bleibt in $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. Weil aber dort $(w_1, w_2) = (w_1, 0)$, ist folglich β auch eine Integralkurve von (w_1, w_2) , also $\beta = \alpha$. \square

Beispiel. Auf $U = \mathbb{C}^2$ betrachten wir das Vektorfeld

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= |z_1|^2 \cdot i\alpha z_1, \\ \dot{z}_2 &= |z_2|^2 \cdot i\beta z_2, \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Es hat den Torus

$$S^1 \times S^1 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| = |z_2| = 1\}$$

als Integralmannigfaltigkeit, denn auf dem Torus sagt die Differentialgleichung $\dot{z}_1 = i\alpha z_1$, $\dot{z}_2 = i\beta z_2$. Man hat also die Lösungen

$$(ae^{i\alpha t}, be^{i\beta t}), \quad |a| = |b| = 1,$$

die auf dem Torus bleiben. Diese Lösungen haben wir früher schon näher untersucht.

(2.2) Bemerkung. *Ist die Integralmannigfaltigkeit im Satz kompakt, und Φ der maximale lokale Fluß von v , so ist $\Phi_t|_M$ für alle t definiert.*

Ist nämlich $\alpha(0) \in M$, so bleibt $\alpha(t) \in M$, die Kurve verläßt das Kompaktum M nie.

Man sieht hieran und an dem Beispiel, was der Nutzen der Integralmannigfaltigkeiten ist: Die Differentialgleichung kann sich bei Einschränkung auf die Mannigfaltigkeit vereinfachen, und jedenfalls wird ihre Dimension erniedrigt.

Oft erhält man Integralmannigfaltigkeiten als Niveauflächen von Funktionen, die auf Lösungen konstant sind. Ein **erstes Integral** eines Vektorfeldes $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $Df \cdot v = 0$.

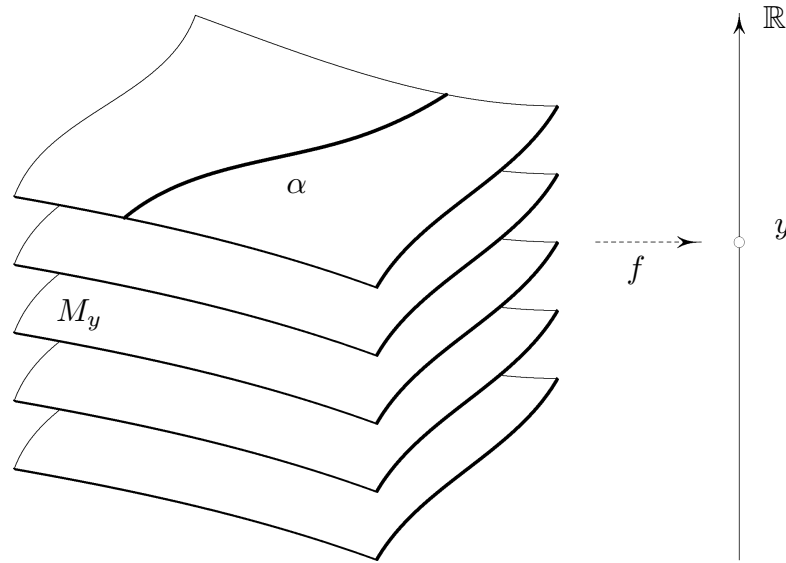
Ist f ein erstes Integral von v , und $y \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f , so ist

$$M := \{x \in U \mid f(x) = y\}$$

eine Integralmannigfaltigkeit von v , weil ja $T_x M = \ker Df(x)$ ist. In der Tat ist auch $(f\alpha) \cdot = Df \cdot v = 0$, also f konstant auf Lösungen.

Ein erstes Integral liefert also eigentlich eine Zerlegung von U in unter dem Fluß invariante Blätter

$$M_y = \{f = y\}$$



Für reguläre Werte y , also für fast alle, sind dies 1-kodimensionale Untermannigfaltigkeiten von U . Ein erstes Integral zu suchen heißt, eine Lösung der partiellen Differentialgleichung für das unbekannte f

$$(2.3) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot v_j(x) = 0$$

zu suchen, und partielle Differentialgleichungen sind kaum leichter zu lösen als gewöhnliche. Aber oft führt die Natur des studierten Phänomens von selbst auf erste Integrale: Die Erhaltungssätze der Physik sind Aussagen über die Existenz erster Integrale. Besonders die Energie, aber auch Impuls und Drehimpuls, wo es hingehört, bleiben bei Bewegungen oft ungeändert. Das Hamiltonsche Vektorfeld

$$\dot{x}_j = \partial H / \partial y_j, \quad \dot{y}_j = -\partial H / \partial x_j$$

hat die Hamiltonfunktion H selbst als erstes Integral, wie wir schon bemerkt haben:

$$\sum_{j=1}^n \dot{x}_j \partial H / \partial x_j + \sum_{j=1}^n \dot{y}_j \partial H / \partial y_j = \sum_{j=1}^n -\dot{x}_i \dot{y}_i + \dot{x}_i \dot{y}_i = 0.$$

In der Himmelsmechanik betrachtet man zentral beschleunigte Bewegungen

$$\ddot{x} = \varphi(x, \dot{x}, t) \cdot x,$$

oder als System geschrieben

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \varphi \cdot x.$$

Für solche Systeme in \mathbb{R}^3 bleibt das Kreuzprodukt von x und v invariant, denn

$$(x \times v) \cdot = \dot{x} \times v + x \times \dot{v} = v \times v + \varphi \cdot x \times x = 0.$$

Das ist eine invariante Funktion mit Werten in \mathbb{R}^3 . Die Lösung bleibt in der von $x(0)$, $v(0)$ bestimmten Ebene (wenn diese Vektoren linear unabhängig sind), und die Fläche des von x, v bestimmten Parallelogramms bleibt konstant. Mit dem Dachprodukt erhält man dasselbe in höherer Dimension.

Erhaltungssätze, Umwandelbares und Bleibendes, sucht sich der Naturforscher durch starke Theoreme zu sichern. Das ist schließlich mehr ein Formprinzip des Geistes als ein Ergebnis der Erfahrung, denn das Erhaltene verflüchtigt sich in immer abstraktere Regionen: nicht die Person, nicht die Erde, nicht die Welt, aber die Energie — jedenfalls in der klassischen Mechanik.

Uns sollen diese Begriffe zum Verständnis des Vektorfeldes helfen, das ungedämpfte, aber im allgemeinen nicht harmonische Schwingungen um eine Ruhelage beschreibt:

Sei u eine C^2 -Funktion lokal um $0 \in \mathbb{R}^n$, und $u(0) = Du(0) = 0$. Wir betrachten u als Potential, und studieren die Gleichung

$$(2.4) \quad \ddot{x} = -\text{grad } u(x),$$

also als System erster Ordnung geschrieben:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\text{grad } u(x). \end{aligned}$$

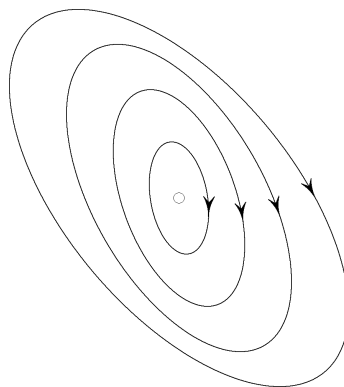
Die Energie ist im wesentlichen $u(x) + \frac{1}{2}|y|^2 =: H(x, y)$, und in der Tat ist H ein erstes Integral:

$$D_x H \cdot \dot{x} + D_y H \cdot \dot{y} = \langle \text{grad } u, y \rangle - \langle \text{grad } u, y \rangle = 0.$$

Angenommen das Potential u ist positiv definit, also etwa die Hessesche von u ist positiv definit im Ursprung, dann ist auch $H = u + \frac{1}{2}|y|^2$ positiv definit, und bei festem $H > 0$ sind die Niveauflächen im Phasenraum durch

$$|y|^2 = 2(H - u(x))$$

gegeben. Im Falle der Dimension eins sind die Lösungen dadurch schon fast bestimmt, die Niveaulinien sind geschlossene Kurven um den Ursprung im Phasenraum $\{(x, y)\}$, die Lösung verläuft auf diesen Kurven, was ein Oszillieren um das Gleichgewicht bedeutet.



Die Gleichung $\dot{x} = y = \sqrt{2(H - u(x))}$, also $dx/\sqrt{2(H - u(x))} = dt$ wird gelöst durch die Umkehrfunktion von

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x dx/\sqrt{2(H - u(x))}.$$

Auch in höherer Dimension ist das System der Niveauflächen konstanter Energie H durch eine Transformation einer Umgebung des Ursprungs lokal in das System konzentrischer Sphären, jeweils mit Radius \sqrt{H} , zu überführen. Jede Integralkurve bleibt auf ihrem Energieniveau, auf ihrer Sphäre. Das folgt aus dem Morse-Lemma (Bd. 2, V, 3.1), wir kommen gleich nochmal darauf zurück. Man muß nur lokal die Funktion H in die Funktion $|x|^2 + |y|^2$ transformieren.

Sowie aber das eben betrachtete System eine kleine Dämpfung erfährt:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\text{grad } u(x) - \mu \cdot y, \quad \mu > 0,$$

so wird H eine Ljapunof-Funktion, und der Ursprung ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht:

$$\langle \text{grad } H, v \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \langle \text{grad } u, y \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle y, -\mu y - \text{grad } u \rangle_{\mathbb{R}^n} = -\mu |y|^2.$$

Qualitativ also gibt die lineare Schwingungsgleichung auch im allgemeinen das richtige Bild.

Haben wir bisher zu einem gegebenen Vektorfeld ein erstes Integral gesucht, so findet man sich doch auch in der Situation, daß eine Funktion gegeben und ein Vektorfeld gesucht ist, deren erstes Integral sie ist, so daß also F auf den Flußlinien des zugehörigen lokalen Flusses Φ konstant ist, $F \circ \Phi_t = F$.

Als Beispiel beweisen wir das Morselemma durch Vektorfeld-Argumente. Das demonstriert zugleich ein auch sonst hilfreiches Beweisprinzip. Wir betrachten der Einfachheit halber nur C^∞ -Funktionen, die in einer Umgebung des Ursprungs definiert sind, und eine Schreibweise wie $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ drücke schon aus, daß alles über f Behauptete nur für eine geeignete Umgebung des Ursprungs gemeint ist.

(2.5) Morselemma. Sei $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal um den Ursprung definierte C^∞ -Funktion, und es sei $f(0) = Df(0) = 0$. Die Hesseform, also der 2-Jet $q = j_0^2 f$ am Ursprung, sei nicht ausgeartet. Dann existiert eine invertierbare lokale C^∞ -Transformation $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ einer Umgebung des Ursprungs in eine Umgebung des Ursprungs, so daß $D\varphi(0) = \text{id}$ und

$$q = f \circ \varphi.$$

Mit anderen Worten: f sieht nach geeigneter Koordinatentransformation ebenso aus, wie seine Hesseform oder sein 2-Jet im Ursprung (die sich ja nur um den Faktor 2 unterscheiden).

Beweis: Wir schreiben $f = q + g$, so daß also q eine nicht ausgeartete quadratische Form ist und der 2-Jet von g im Ursprung verschwindet. Demnach ist

$$(i) \quad \partial q / \partial x_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j, \quad \det(q_{ij}) \neq 0,$$

denn $(q_{ij}) = (\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)$ ist ja die Hessematrix. Weil aber g von zweiter Ordnung verschwindet, ist nach dem Mittelwertsatz, Bd. 2, I, (5.2)

$$(ii) \quad \partial g / \partial x_i = \sum_j \beta_{ij} x_j, \quad \beta_{ij}(0) = 0, \quad g = \sum_{i,j} \gamma_{ij} x_i x_j,$$

nämlich $g = \sum_i a_i x_i$, und $a_i(0) = \partial g / \partial x_i(0) = 0$, also $a_i = \sum_j \gamma_{ij} x_j$. Dies behalten wir im Auge und betrachten jetzt auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ lokal um $0 \times \mathbb{R}$ die Funktion

$$F(x, t) := f_t(x) := q(x) + tg(x).$$

Dann ist $f_0 = q$, $f_1 = f$, und wir wollen ein zeitabhängiges Vektorfeld w auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, also ein Vektorfeld der Form

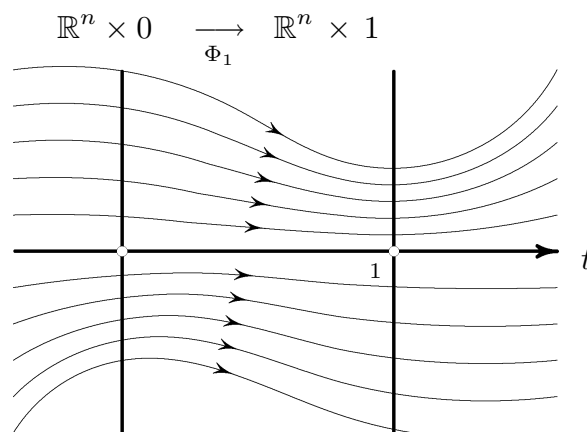
$$w = (v_1, \dots, v_n, 1) = (v, 1)$$

konstruieren, das die Achse $t \mapsto (0, t)$ als Flußlinie und F als erstes Integral hat. Ist Φ der Fluß eines solchen Feldes, so hat man (lokal um den Ursprung) die Transformation

$$\varphi := \Phi_1 : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \times 1 = \mathbb{R}^n, \quad \varphi(0) = 0,$$

welche für $x = 0$, also für kleine x definiert ist, und sie erfüllt

$$f_0 = f_1 \circ (\Phi_1 | \mathbb{R}^n \times 0), \quad \text{also} \quad q = f \circ \varphi.$$



Die Bedingung an das gesuchte Feld, also an v ist

$$-\partial F / \partial t = \sum_j \partial F / \partial x_j \cdot v_j, \quad v_j(0, t) = 0,$$

oder wenn wir Vektoren als Spaltentupel schreiben

$$(iii) \quad -\partial F / \partial t = {}^t(\text{grad}_x F) \cdot v, \quad v(0, t) = 0.$$

Nun sagen aber die Gleichungen (i), (ii) und die Definition von F

$$\partial F / \partial t = g = {}^t x G x, \quad G = (\gamma_{ij}),$$

$$\text{grad}_x F = \text{grad}_x q + t \text{grad}_x g = A x, \quad A = (q_{ij} + t \beta_{ij}),$$

und weil (q_{ij}) nicht ausgeartet und $\beta_{ij}(0) = 0$ ist, ist $A(x, t)$ für (x, t) in einer Umgebung von $0 \times \mathbb{R}$ invertierbar. Unsere Gleichung (iii) für das gesuchte v lautet demnach

$$-{}^t x G x = {}^t(Ax) \cdot v = {}^t x {}^t A v, \quad v(0, t) = 0,$$

und wird durch $v := -{}^t A^{-1} G x$ gelöst.

Übrigens sieht man leicht, daß die Variationsgleichung des Feldes w auf dem Orbit $t \mapsto (0, t)$ verschwindet, und daher ist $D\varphi(0) = \text{id}$, aber weil ja aus dem Formulierten ohnehin $q \circ D\varphi(0) = q$ folgt, könnte man das durch lineare Transformation auch nachträglich erreichen. \square

§ 3. Implizite Differentialgleichungen

Eine **implizite Differentialgleichung erster Ordnung** ist durch eine Abbildung

$$F : D \times U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$$

gegeben. Dabei ist D ein offenes Intervall und U, V sind offen in \mathbb{R}^n , und wir wollen stets annehmen, daß F stetig differenzierbar ist. Eine **Lösung**, und das macht die Abbildung erst zu einer Differentialgleichung, ist eine Kurve α , so daß

$$(3.1) \quad F(x, \alpha(x), \alpha'(x)) = 0,$$

und man notiert daher auch die Differentialgleichung in der Form $F(x, y, y') = 0$. Man fragt nach Lösungen, nach der Struktur der Schar aller Lösungen.

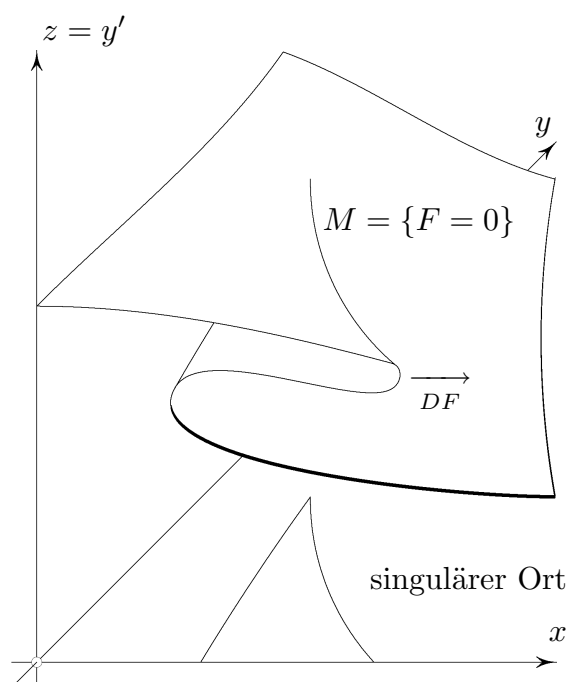
Hat man zunächst einen Punkt (x_0, y_0, z_0) bestimmt, wo $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ist, und ist an dieser Stelle $\det(D_z F) \neq 0$, so kann man lokal die Gleichung $F = 0$ nach z auflösen, (Bd. 2, II, 3.1). Sie ist lokal äquivalent zu einer expliziten Gleichung

$$z = G(x, y), \quad \text{also} \quad y' = G(x, y),$$

über deren Theorie wir bisher geredet haben.

Im allgemeinen darf man nicht erwarten, daß eine solche Auflösung überall möglich sein wird. Schon eher ist es vernünftig vorauszusetzen, daß 0 ein regulärer Wert von F ist,

und daher $F = 0$ eine Mannigfaltigkeit M der Dimension $(n+1)$ in $D \times U \times V$ definiert. Die Bedingung $\det(D_z F) \neq 0$ beschreibt die Punkte aus M , die sich mit regulärer Tangentialabbildung auf $D \times U$ projizieren, so daß man lokal einem Punkt $(x, y) \in D \times U$ demnach ein $z \in V$ differenzierbar so zuordnen kann, daß $(x, y, z) \in M$. Letztere Bedingung bedeutet ja $F(x, y, z) = 0$. Jedoch wird es über einem Punkt $(x, y) \in D \times U$ dann auch mal mehrere z geben, so daß $(x, y, z) \in M$, also wird man mehrere Lösungen durch einen Punkt finden.



Im Falle $n = 1$ kann man fragen, ob etwa der **singuläre Ort**

$$\{(x, y) \mid F(x, y, z) = D_z F(x, y, z) = 0 \text{ für ein } z\}$$

auch eine Lösungskurve ist. Jedoch ist das unwahrscheinlich in einem Sinne, den man präzisieren kann. Um so beliebter ist dieser Fall in den Lehrbüchern, und ein klassisches Beispiel ist die

(3.2) Clairautsche Differentialgleichung.

$$y = y'x + g(y').$$

Sie besitzt als Lösungsschar eine durch c parametrisierte Schar von Geraden

$$y = cx + g(c),$$

jeweils mit Steigung c und $g(c) = y(0)$.

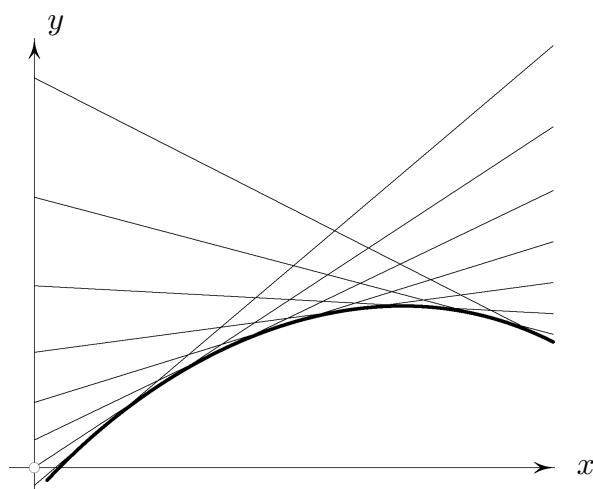
Die Einhüllende einer Lösungsschar ist natürlich auch eine Lösung, wenn sie unter der Projektion diffeomorphes Bild einer regulären Kurve (d.h. eindimensionalen Untermannigfaltigkeit) im \mathbb{R}^3 der Parameter (x, y, c) ist. Sie hat ja in jedem Punkt dieselbe Tangente wie eine dort durchgehende Lösung der Schar. Die Einhüllende wird nach Bd. 2, II, (5.2) durch die Gleichungen

$$F(x, y, c) := y - cx - g(c) = 0, \quad \partial F / \partial c(x, y, c) = 0$$

beschrieben. Und weil dieses, wenn man c durch z ersetzt, auch die Gleichungen des singulären Ortes sind, ist dieser eine Lösung. Man rechnet sofort aus, daß die beiden Gleichungen die Parameterdarstellung

$$x = -g'(c), \quad y = -cg'(c) + g(c)$$

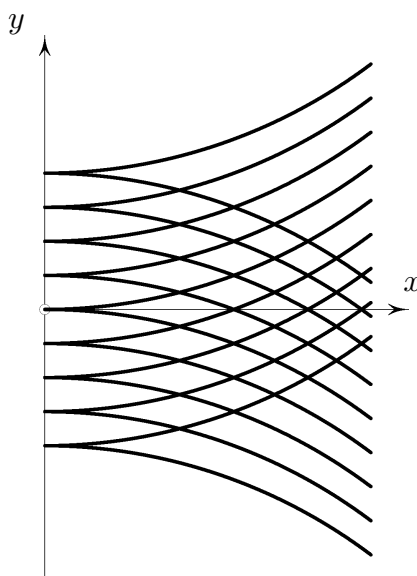
der Enveloppe liefern, und setze nur ein!



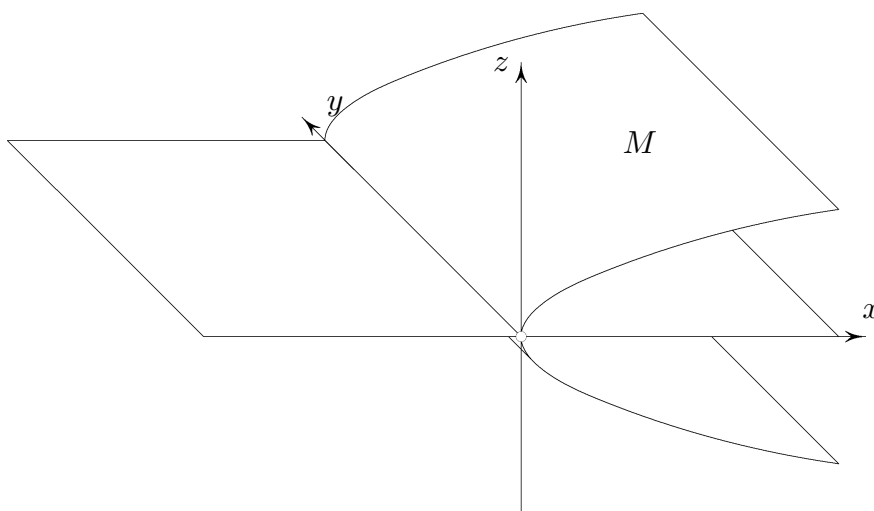
Die Clairautsche Differentialgleichung beschreibt also, wenn der singuläre Ort eine reguläre Kurve ist, die Tangentenschar dieser Kurve. Viel typischer ist allerdings aus Gründen, die wir noch etwas näher, wenngleich nicht vollkommen, beleuchten werden, daß die Lösungen auf dem singulären Ort senkrecht stehen. Bis auf stetig differenzierbare Transformation findet man fast überall das Bild der Differentialgleichung

$$(3.3) \quad (y')^2 = x$$

mit den Lösungen $y = \pm \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$ und dem singulären Ort $x = 0$.



Die beiden Zweige $\pm \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$ der Neilschen Parabeln entsprechen den beiden Blättern $z = \pm\sqrt{x}$ der Fläche $M = \{(x, y, z) \mid z^2 = x\}$ die über der (x, y) -Ebene in der Faltenlinie $x = 0$ zusammenkommen.



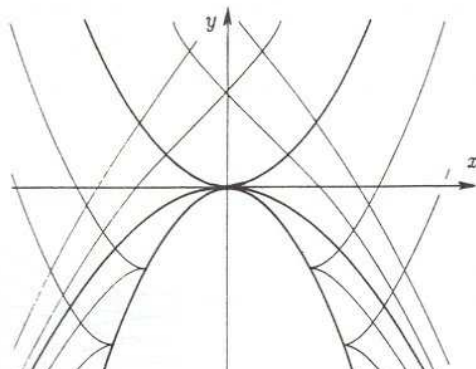
Nur an isolierten Punkten des singulären Ortes haben im allgemeinen die Lösungen der Differentialgleichung gleiche Tangente wie der singuläre Ort. Typisch sind die folgenden Beispiele:

(3.4) Der Sattel:

$$x^2 - (y')^2 + y = 0.$$

Singulärer Ort

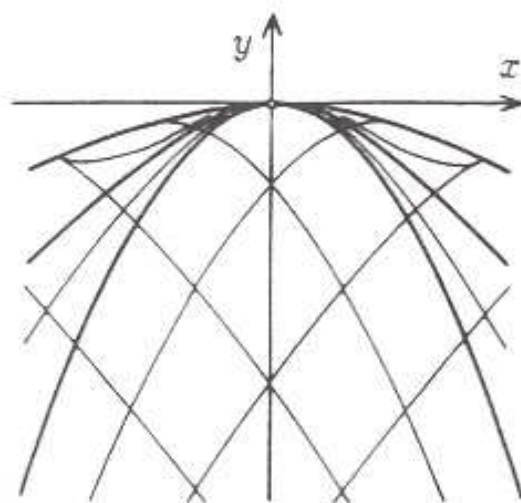
$$y = -x^2.$$

**(3.5) Der Knoten:**

$$x^2 + (y')^2 + 8y = 0.$$

Singulärer Ort

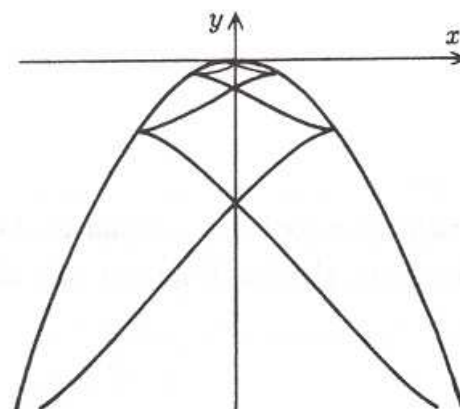
$$8y = -x^2.$$

**(3.6) Die Spirale:**

$$x^2 + (y')^2 + y = 0.$$

Singulärer Ort

$$y = -x^2.$$



Nicht umsonst erinnern diese Namen an die entsprechenden in der Theorie der ebenen, insbesondere der linearen ebenen Differentialgleichungen. Wie dies zusammenhängt, und wie man die Lösungen der impliziten Differentialgleichungen erster Ordnung findet, wollen wir jetzt angeben, wenngleich diese Gedanken erst in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wirklich ausgeführt werden.

Die implizite Differentialgleichung F auf $D \times U \times V$ liefert auf naheliegende Weise ein Vektorfeld auf $D \times U \times V$, und zwar so, daß $M = \{F = 0\}$ eine Integralmannigfaltigkeit dieses Vektorfeldes ist, und daß die Lösungen sich bei Projektion auf $D \times U$ auf Lösungskurven der impliziten Gleichung F abbilden. Das gesuchte Vektorfeld ist

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1, \\ \dot{y} &= z,\end{aligned}$$

zwei sehr nahe liegende Gleichungen, die erste sagt $dx = dt$, die zweite $dy/dt = y'$. Die Gleichung für \dot{z} wird jetzt dadurch bestimmt, daß F ein erstes Integral werden soll. Das nämlich bedeutet

$$\partial F / \partial x \cdot \dot{x} + D_y F \cdot \dot{y} + D_z F \cdot \dot{z} = 0.$$

Also falls $D_z F$ regulär ist, mit den schon gefundenen Gleichungen

$$\dot{z} = -(D_z F)^{-1}(\partial F / \partial x + D_y F \cdot z).$$

Dieses Feld ist nur definiert, wo $D_z F$ regulär ist. Aber wir helfen dem ab, indem wir das Feld mit der Funktion $\det(D_z F)$ multiplizieren. Für die Lösungskurven entspricht dies einer Parametertransformation, und entsprechend erhalten wir durch Projektion eine Parameterdarstellung der Lösungen von F . Wir erinnern uns aus der linearen Algebra an die Cramersche Regel

$$\det(A) \cdot A^{-1} = \tilde{A} \quad (\text{adjungierte Matrix}),$$

und erhalten also auf $D \times U \times V$

(3.7) Das charakteristische Vektorfeld.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \det(D_z F), \\ \dot{y} &= (\det D_z F) \cdot z, \\ \dot{z} &= -(D_z F)^\sim \cdot (\partial F / \partial x + D_y F \cdot z).\end{aligned}$$

Man nennt es auch das **Hamiltonsche Vektorfeld**. Die Gedanken, die zu seiner Konstruktion geführt haben, bestätigen sich in folgendem

(3.8) Satz. *Eine Integralkurve dieses Feldes, die in M beginnt, verbleibt in M und projiziert sich auf eine Lösungskurve von $F(x, y, y') = 0$, und jede Lösungskurve außerhalb des singulären Ortes erhält man so.*

Beweis: Die erste Behauptung ist evident, ist $(x(t), y(t), z(t))$ eine Integralkurve der zunächst aufgestellten drei Gleichungen, so ist $x = t$, $\dot{y} = dy/dx = z$, und weil F ein erstes Integral ist, ist auf der ganzen Kurve $F(x, y, y') = F(t, y(t), z(t)) = 0$. Hat man umgekehrt eine Lösungskurve α von F außerhalb des singulären Ortes, so wird behauptet, daß

$$t \mapsto (t, \alpha(t), \dot{\alpha}(t))$$

die drei obigen Gleichungen erfüllt. Die ersten beiden sind offenbar erfüllt, $\dot{t} = 1$, $\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(t)$. Jedenfalls verläuft die angegebene Kurve auch in M , und auf M ist das Hamiltonsche Feld durch die beiden ersten Komponenten und die Tatsache, daß es tangential zu M ist, bestimmt, weil die Projektion $M \rightarrow D \times U$ in Punkten, wo $D_z F$ regulär ist, einen Isomorphismus $TM \rightarrow T(D \times U)$ induziert, es gibt eine lokale Umkehrung. \square

Die singulären Punkte des Hamiltonschen Feldes auf M liegen alle über dem singulären Ort von F , denn es ist nur dort $\det(D_z F) = 0$.

Wir wollen noch den Fall $n = 1$ näher betrachten. Hier ist übrigens $\tilde{A} = 1$, und die Hamiltonschen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \partial F / \partial z, \\ \dot{y} &= \partial F / \partial z \cdot z, \\ \dot{z} &= -\partial F / \partial x - \partial F / \partial y \cdot z.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen verschwinden wie gesagt nur, wo $\partial F / \partial z = 0$ ist, und dort ist der Normalvektor DF auf M parallel zur (x, y) -Ebene $D \times U$. Außerdem muß aber $\dot{z} = 0$ sein, das heißt

$$\partial F / \partial x + z \cdot \partial F / \partial y = 0.$$

Also in \mathbb{R}^2

$$\langle (1, z), (\partial F / \partial x, \partial F / \partial y) \rangle = 0,$$

also der Tangentialvektor an die zugehörige Lösung $(1, z) = (1, y')$ der impliziten Gleichung steht senkrecht auf dem Vektor $(\partial F / \partial x, \partial F / \partial y)$. Dieser Vektor ist der Normalvektor des singulären Ortes, falls die Projektion $M \rightarrow D \times U$ noch den Rang 1 hat. Mit anderen Worten: Der singuläre Ort ist tangential zur Lösung, wo das Hamiltonsche Feld singulär ist, und nur dort. Nun ist das Hamiltonsche Feld im allgemeinen nur an isolierten Punkten singulär, und weil es ja hier auf das Vektorfeld auf der Fläche M ankommt, liegt es nahe zu vermuten, daß die Singularitäten meist unsere alten Bekannten — Sattel, Knoten, Spirale sind.

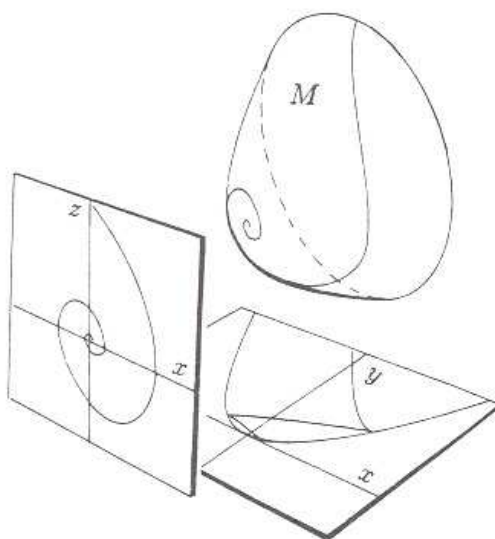
Um die Singularitäten des Hamiltonschen Feldes in den obigen Beispielen zu studieren, projizieren wir M lokal diffeomorph auf die (x, z) -Ebene. Die Beispiele sind so hingelegt,

daß die y -Richtung im singulären Punkt des Hamiltonfeldes senkrecht auf M , nämlich senkrecht auf dem singulären Ort steht.

	Hamiltonfeld	Projektion
Sattel:	$\begin{aligned} \dot{x} &= -2z, \\ \dot{y} &= -2z^2, \\ \dot{z} &= -2x - z, \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}' = - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$
Knoten:	$\begin{aligned} \dot{x} &= 2z, \\ \dot{y} &= 2z^2, \\ \dot{z} &= -2x - 8z, \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$
Spirale:	$\begin{aligned} \dot{x} &= 2z, \\ \dot{y} &= 2z^2, \\ \dot{z} &= -2x - z, \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$

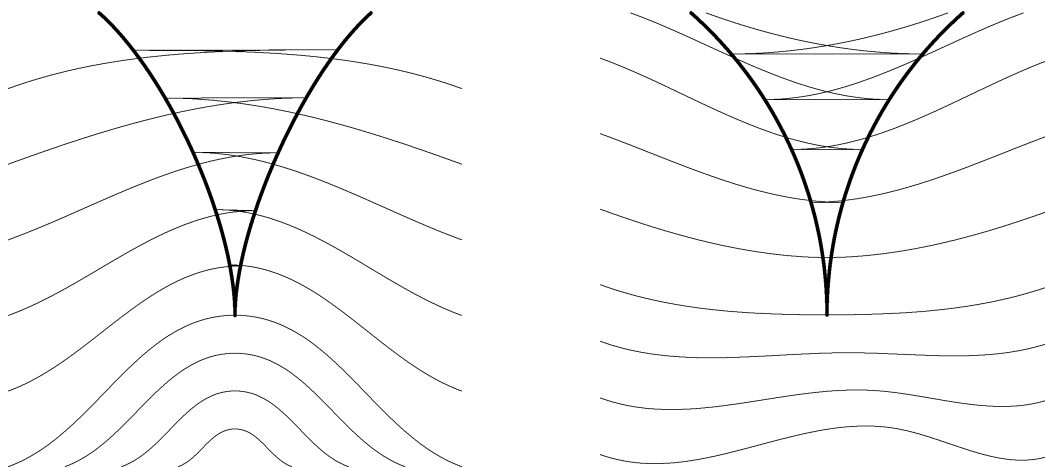
Es sei dem Leser überlassen zu prüfen, daß auf der rechten Seite immer die linearen Singularitäten mit dem zugehörigen Namen stehen.

Für die Spirale möge ein Bild die Verhältnisse noch einmal verdeutlichen:



Man erkennt nebenher, daß man die Lösungen der Hamiltongleichungen wirklich ausrechnen, und damit auch die Lösungen der impliziten Differentialgleichung durch allerlei Formeln explizit angeben kann.

Übrigens weist schon das erste Bild dieses Abschnitts darauf hin, daß der singuläre Ort im allgemeinen nicht glatt ist, und mit Vorliebe Spitzen aufweist, wo das Lösungsverhalten dadurch kompliziert wird, daß drei Lösungsscharen zusammenkommen. Typische Bilder:



Sie kommen dadurch zustande, daß der glatte reguläre Hamiltonfluß auf M bei Projektion auf die $D \times U$ -Ebene übereinandergefaltet wird, wie das Gewebe beim Abnäher eines Kleides. Die hier immer etwas vage ausgesprochenen Bemerkungen, daß diese Bilder "typisch" sind, und daß die Beispiele zeigen, was man "im allgemeinen" finden oder nicht finden wird, lassen sich präzise fassen und beweisen, jedoch bräuchte das Vorbereitung.

Wenden wir unsere allgemeine Einsicht zum Schluß auf einen klassischen Fall an:

(3.10) D'Alembertsche Differentialgleichung.

$$y - g(y')x - f(y') = 0.$$

Die Clairautsche ist der Spezialfall $g(y') = y'$. Das Hamiltonfeld ist

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(g'(z)x + f'(z)), \\ \dot{y} &= -z(g'(z)x + f'(z)), \\ \dot{z} &= g(z) - z.\end{aligned}$$

Im Clairautschen Fall ist $\dot{z} = 0$ woraus sich die regulären Lösungen ergeben. Jedenfalls kennen wir die letzte Gleichung. Wenn man darf, schreibe man dafür

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{g(z) - z}$$

und integriere, löse die nach Einsetzen von $z(t)$ lineare erste Differentialgleichung und integriere noch einmal. Das Rechnen muß man selbst üben, man kann es nicht im Vortrag aufnehmen. Auch sonst haben wir nicht etwa von allem das Wichtigste gebracht, oder auch nur den Anfang. Doch wir eilen neuen Zielen zu.