
Kapitel IV

Das euklidische Lebesgueintegral

*Voran, voran! nur immer im Lauf,
voran, als woll es ihn holen!
Vor seinem FuÙe brodelt es auf,
es pfeift ihm unter den Sohlen.*

Annette

Hier kehren wir aus allgemeinen Maßfeldern zurück zum euklidischen Raum. Ein Abschnitt über ProduktmaÙe führt insbesondere von \mathbb{R} zu \mathbb{R}^n mit dem LebesguemaÙ. Integrale sind als iterierte Integrale einer Variablen mit Glück wirklich zu berechnen. Ein Hauptergebnis ist die Transformationsformel, und damit führen wir die Integralrechnung zum selben Punkt, wo wir mit der Differentialrechnung aufgehört haben: Wir stehen am Ende, wo die globale Analysis beginnen kann.

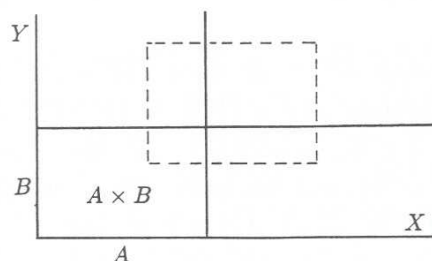
§ 1. Produkte von Maßräumen

In diesem Abschnitt konstruieren wir aus zwei σ -endlichen Maßräumen (X, \mathcal{A}, μ) und (Y, \mathcal{B}, ν) einen Produktraum

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu).$$

Induktiv entsteht so aus \mathbb{R} mit dem eindimensionalen LebesguemaÙ dann \mathbb{R}^n mit dem n -dimensionalen LebesguemaÙ.

Auf dem cartesischen Produkt $X \times Y$ der gegebenen Maßräume betrachten wir die Algebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ der sämtlichen endlichen disjunkten Vereinigungen von **Rechtecken** $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$.



Mit zwei Mengen $M, N \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ sind auch $M \cap N$ und das Komplement $\complement M$ in $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, wie man leicht nachprüft. Es sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ die von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ auf $X \times Y$ erzeugte σ -Algebra.

Sind z.B. \mathcal{A} und \mathcal{B} die Borelalgebren topologischer Teilräume X und Y eines \mathbb{R}^n , so ist $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ die Borelalgebra des topologischen Produkts $X \times Y$. Eigentlich benutzt man hier nur, daß die betrachteten topologischen Räume eine abzählbare Basis der Topologie haben. Darauf werden wir in (Bd.3, IV, §1) genauer eingehen.

Wir wollen aus σ -endlichen Maßen μ auf \mathcal{A} und ν auf \mathcal{B} ein σ -endliches Produktmaß $\mu \otimes \nu$ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ konstruieren, das für Rechtecke das Naheliegende liefert:

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

Bevor wir uns dem zuwenden, müssen wir nun doch etwas genauer hinsehen, wie die erzeugte σ -Algebra aus einer gegebenen Algebra entsteht. Wir gehen von einer Situation aus, wie wir sie hier vorgefunden haben: Gegeben sei eine Menge Z mit einer Algebra \mathcal{R} von Teilmengen von Z , für die gilt:

$$A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B, \text{ und } \complement A \in \mathcal{R}.$$

Ein System \mathcal{M} von Teilmengen von Z heißt **monoton**, wenn gilt:

- (i) Sind $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ alle in \mathcal{M} , so auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$.
- (ii) Sind $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ alle in \mathcal{M} , so auch $\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$.

(1.1) Lemma (über monotone Klassen). Sei \mathcal{R} eine Mengenalgebra auf Z wie oben, und sei \mathcal{M} das kleinste monotone System von Teilmengen von Z , das \mathcal{R} enthält. Dann ist \mathcal{M} die von \mathcal{R} erzeugte σ -Algebra.

Beweis: Das System $\mathcal{M}' = \{Y \in \mathcal{M} \mid \complement Y \in \mathcal{M}\}$ und ebenso für jedes $B \in \mathcal{M}$ das System $\mathcal{M}_B = \{Y \in \mathcal{M} \mid Y \cap B \in \mathcal{M}\}$ sind wieder monoton. Ist nun $A \in \mathcal{R}$, so auch $\complement A \in \mathcal{R}$, also $A \in \mathcal{M}'$. Das zeigt $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}'$, also $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$, und das heißt: Mit Y ist auch $\complement Y$ in \mathcal{M} .

Sind aber $A, B \in \mathcal{R}$, so ist $A \cap B \in \mathcal{R}$, und das sagt $A \in \mathcal{M}_B$. Weil das für alle $A \in \mathcal{R}$ gilt, folgt $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_B$, also $\mathcal{M} = \mathcal{M}_B$ für alle $B \in \mathcal{R}$. Das wiederum sagt: Ist $Y \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{R}$, so ist $Y \cap B \in \mathcal{M}$. Das heißt $B \in \mathcal{M}_Y$, und weil das für alle $B \in \mathcal{R}$ gilt, folgt $\mathcal{M} = \mathcal{M}_Y$, und das bedeutet: Mit Y, Z ist auch $Y \cap Z$ in \mathcal{M} . Damit ist \mathcal{M} eine σ -Algebra. \square

Auf unser Ziel zurückzukommen: Die Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ entsteht also aus $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ als kleinstes monotones System von Teilmengen von $X \times Y$, das $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ enthält.

Weil die Maße μ, ν auf X und Y in diesem Abschnitt ein für allemal gegeben sind, werden wir in den zugehörigen Integralen im folgenden oft

$$dx, dy \quad \text{statt} \quad d\mu, d\nu$$

schreiben. Auch $\mu(dx)$ ist sonst üblich. Wir setzen im folgenden voraus, daß beide Maßräume σ -endlich, also jeweils die Vereinigung einer Folge von Teilmengen von endlichem Maß sind. Der Konstruktion des Produktmaßes und des zugehörigen Integrals dient folgendes

(1.2) Lemma. Sei $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ eine $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -meßbare Funktion. Dann gilt:

- (i) Jede Funktion $f_x : Y \rightarrow [0, \infty]$, $y \mapsto f(x, y)$, ist \mathcal{B} -meßbar.
- (ii) Durch $x \mapsto \int_Y f_x d\nu =: \int_Y f(x, y) dy$ wird eine \mathcal{A} -meßbare Funktion auf X definiert.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß $\nu(Y)$ endlich ist, und betrachten charakteristische Funktionen $f = \chi_M$. Sei

$$\mathcal{M} = \{M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid f = \chi_M \text{ erfüllt (i) und (ii)}\}.$$

Dieses System von Teilmengen $\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ enthält alle Rechtecke, also $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, und es ist monoton: Sind $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ alle in \mathcal{M} , so auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, denn das Supremum einer Folge meßbarer Funktionen ist meßbar, und das Integral ist mit Grenzwerten aufsteigender Folgen vertauschbar (Hier ist das Integral nach III, § 5 in $[0, \infty]$ zu nehmen). Ebenso wenn $M_1 \supset M_2 \supset \dots$ alle in \mathcal{M} sind, so auch $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Hier bleiben die Integrale $\int \chi_{M_n}(x, y) dy$ alle durch $\nu(Y)$ beschränkt, und wir können den Satz über dominierte Konvergenz anwenden. Somit ist $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, jedenfalls wenn $\nu(Y)$ endlich ist.

Ist dies nicht der Fall, so wähle eine steigende Folge $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ in Y mit $\nu(Y_n) < \infty$ für alle n und $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = Y$. Setzt man dann $M_n = M \cap (X \times Y_n)$, so ist $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ und alle $M_n \in \mathcal{M}$, nach dem schon Gezeigten. Also $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M \in \mathcal{M}$, wieder nach demselben Argument über monotone Konvergenz. Damit ist $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, also das Lemma gilt für alle charakteristischen Funktionen meßbarer Mengen in $X \times Y$, damit auch für alle Stufenfunktionen, und wieder nach dem Satz über monotone Konvergenz, und weil Meßbarkeit sich auf Grenzfunktionen vererbt, gilt das Lemma allgemein. \square

(1.3) Cavalieris Prinzip. *Es gibt auf $X \times Y$ genau ein Produktmaß*

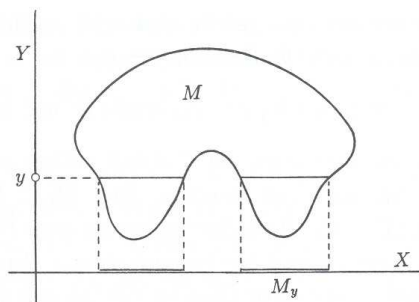
$$\mu \otimes \nu: \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$$

mit der Eigenschaft: Für Rechtecke $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

Für eine meßbare Menge $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist

$$(\mu \otimes \nu)(M) = \int_X \left(\int_Y \chi_M(x, y) dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X \chi_M(x, y) dx \right) dy.$$



Setzen wir

$$M_y = \{x \in X \mid (x, y) \in M\},$$

so ist $\int_X \chi_M(x, y) dx = \mu(M_y)$, und die Formel besagt:

$$(1.4) \quad (\mu \otimes \nu)(M) = \int_Y \mu(M_y) dy.$$

Beweis: Nach (1.2), mit vertauschten Faktoren auf χ_M für f angewendet, wird durch die rechte Seite von (1.4) eine additive Mengenfunktion auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ definiert, die nach dem Satz (III, 5.3) über monotone Konvergenz auch σ -additiv ist, und sie hat den behaupteten Wert auf Rechtecken. Die Eindeutigkeit folgt nach der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Hahn (III, 2.6). Natürlich folgt die andere Integralformel für $\mu \otimes \nu$ aus Symmetrie der Voraussetzungen.

□

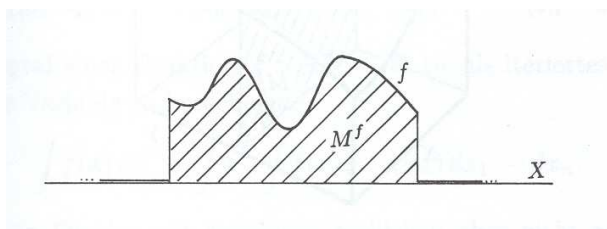
Dies erlaubt nun eine neue Beschreibung des Integrals. Sei nämlich X ein σ -endlicher Maßraum, den wir uns für sein Maß μ vervollständigt, also um die Nullmengen erweitert denken. Dann ist auch $X \times \mathbb{R}$ ein Maßraum, der Produktraum von X mit \mathbb{R} , wobei \mathbb{R} das Lebesguemaß λ trägt. Sei $\mu \otimes \lambda$ das Produktmaß auf $X \times \mathbb{R}$.

(1.5) Bemerkung. Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare nie negative Funktion, so ist die Menge

$$M^f := \{(x, t) \mid t < f(x)\} \subset X \times [0, \infty)$$

meßbar in $X \times [0, \infty)$, und ihr Maß ist

$$(\mu \otimes \lambda)(M^f) = \int_X f dx.$$



Beweis: Die Funktion $(x, t) \mapsto f(x) - t$ ist meßbar, daher ist M^f meßbar, und nach Cavalieri ist

$$(\mu \otimes \lambda)(M^f) = \int_X \lambda(M_x^f) dx = \int_X f(x) dx. \quad \square$$

Jetzt betrachten wir zwei σ -endliche Maßräume X und Y und zeigen, daß man das Integral einer Funktion $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ als iteriertes Integral $\int_Y (\int_X f(x, y) dx) dy$ berechnen kann (wenn überhaupt). Das entsprechende gilt natürlich in umgekehrter Reihenfolge.

(1.6) Satz von Fubini. Seien X und Y zwei σ -endliche Maßräume, und sei $X \times Y$ ihr Produkt mit dem Produktmaß. Sei $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ integrabel. Dann ist für fast jedes $y \in Y$ auch die Funktion

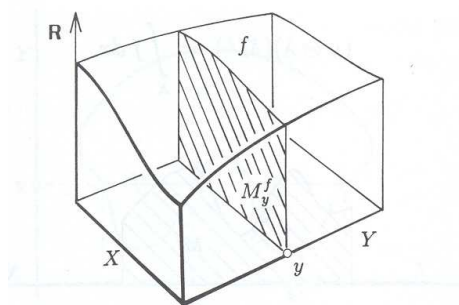
$$X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x, y)$$

integrabel. Die damit fast überall definierte Funktion

$$Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \int_X f(x, y) dx$$

ist integrabel, und es gilt:

$$\int_{X \times Y} f = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy.$$



Die analoge Aussage und Formel hat man natürlich aus Symmetrie der Voraussetzungen für die Integration in umgekehrter Reihenfolge, und man schreibt:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) dx dy = \int_X \int_Y f(x, y) dy dx.$$

Beweis: Ist f meßbar und nie negativ, so ist die Integralformel ein Spezialfall von Cavalieris Prinzip, angewandt auf M^f wie in der Bemerkung (1.5), denn

$$\int_X f(x, y) dx = (\mu \otimes \lambda)(M_y^f) \text{ und } \int_{X \times Y} f = (\mu \otimes \nu \otimes \lambda)(M^f).$$

Ist dabei f integrierbar, also das Integral endlich, so muß auch die Funktion $y \mapsto \int_X f(x, y) dx$ fast überall endlich sein, damit ihr Integral endlich bleibt. Das zeigt die Behauptung in diesem Fall und durch Zerlegung $f = f_+ - f_-$ dann für beliebige meßbare Funktionen f . Das sind alle integrierbaren bis auf eine Nullmenge. Ist aber $N \subset X \times Y$ meßbar vom Maß Null, so ist auch $N_y \subset X$ meßbar, und muß nach Cavalieris Prinzip für fast jedes y das Maß Null haben, weil $\int_Y \mu(N_y) dy = 0$. Ersetzt man f also auf so einer Menge durch 0, so ändert sich nirgends im Satz die Integrierbarkeit oder das Integral. \square

Auf dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ haben wir jetzt das n -dimensionale Lebesguemaß λ_n als Produktmaß auf der Borel-

algebra, das dadurch bestimmt ist, daß es für ein achsenparalleles Quader das elementare Volumen liefert:

$$\lambda_n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n).$$

Das Integral einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist als iteriertes Integral über eine Variable zu berechnen:

$$\int f(x) dx = \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Bildet man Quader mit beliebigen endlichen aber nicht notwendig abgeschlossenen Intervallen, so bilden die sämtlichen endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern eine Mengenalgebra \mathcal{Q} , und das Lebesguemaß stimmt auf dieser Algebra mit dem elementaren Volumen überein. Allgemein entsteht es aus diesem elementaren Maß auf \mathcal{Q} dann durch Erweiterung nach dem Hahnschen Erweiterungssatz, denn \mathcal{Q} erzeugt als σ -Algebra die Borelgebra. Das Lebesguemaß $\lambda(A) = \lambda_n(A)$ einer beliebigen meßbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist folglich das mit $\lambda|_{\mathcal{Q}}$ gebildete äußere Maß

$$(1.7) \quad \lambda(A) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(Q_j),$$

wo das Infimum über alle Folgen von Quadern Q_j mit $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ gebildet wird. Weil jedes Quader Q zu jedem $\varepsilon > 0$ in einer Vereinigung von Würfeln W_k mit $\sum_k \lambda(W_k) \leq \lambda(Q) + \varepsilon$ liegt, erhält man mit einem $\varepsilon/2^j$ -Schluß, daß man statt Quadern bei der Bildung des äußeren Maßes auch immer nur Würfel nehmen kann. Man entnimmt daraus, daß das Lebesguemaß durch seinen Wert auf abgeschlossenen Würfeln bestimmt ist.

(1.8) Invarianz des Integrals. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-meßbare Menge.

(i) *Translationsinvarianz:* Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist $\lambda(A) = \lambda(A + v)$, also

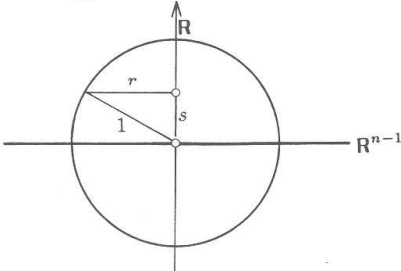
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + v) dx.$$

(ii) *Homogenität:* Für $t \in \mathbb{R}$ ist $\lambda(tA) = |t|^n \lambda(A)$, für $t \neq 0$ also

$$|t|^n \int_{\mathbb{R}^n} f(tx) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Beweis: Die Aussage über die Maße gilt für Würfel, also allgemein. Daraus folgt die Aussage über die Integrale zunächst für charakteristische Funktionen. Beachte $\chi_{tA}(x) = \chi_A(t^{-1}x)$. Dann folgt sie für Treppenfunktionen, also allgemein. \square

Man kann mit dieser Bemerkung und Cavalieris Prinzip das Volumen hinreichend regelmäßiger Körper ausrechnen. Sei zum Beispiel c_n das Volumen der n -dimensionalen Kugel $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$. Der Durchschnitt von D^n mit der Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{s\}$ ist dann $(\sqrt{1-s^2} \cdot D^{n-1}) \times \{s\}$ für $-1 \leq s \leq 1$, und daher ist

$$c_n = \int_{-1}^1 (\sqrt{1-s^2})^{n-1} c_{n-1} ds.$$


Mit der Substitution $s = \sin t$ erhält man die Rekursion

$$(1.9) \quad c_n = c_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t dt.$$

Das Integral werden wir später weiter untersuchen, siehe (4.11).

Der Schnellweg von Cavalieris Prinzip zum Satz von Fubini, den wir hier besprochen haben, wäre für Funktionen mit Werten in einem

Banachraum so nicht mehr gangbar, man müßte da etwas aufwendiger mit dem Normkonvergenzsatz argumentieren.

§ 2. Die Transformationsformel

Ein wesentliches Hilfsmittel zur Berechnung eindimensionaler Integrale ist die Transformationsformel: Ist $\varphi : [a, b] \rightarrow [\varphi(a), \varphi(b)]$ eine stetig differenzierbare Parametertransformation, so ist

$$\int_a^b f \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Für uns bedeutet das:

$$\int_{[a,b]} (f \circ \varphi) \cdot \varphi' dt = \int_{[\varphi(a), \varphi(b)]} f(x) dx.$$

Hat man eine orientierungsumkehrende Transformation

$$\varphi : I = [a, b] \rightarrow [\varphi(b), \varphi(a)] = \varphi I, \quad \varphi' \leq 0,$$

so ergibt sich:

$$\int_I (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = - \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f = - \int_{\varphi I} f,$$

also für eine Transformation φ mit $\varphi' \neq 0$ allgemein:

$$(2.1) \quad \int_I (f \circ \varphi) \cdot |\varphi'| dt = \int_{\varphi I} f(x) dx.$$

Dies ist die Transformationsformel im Eindimensionalen, und die entsprechende Aussage für das Lebesgueintegral im Höherdimensionalen lautet wie folgt:

(2.2) Transformationsformel. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $\varphi : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus mit einer offenen Menge V in \mathbb{R}^n . Dann

ist eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann integrabel, wenn die Funktion $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| : U \rightarrow \mathbb{R}$ integrabel ist. Und es gilt:

$$\int_V f(y) dy = \int_U f\varphi(x) \cdot |\det D\varphi(x)| dx.$$

Als Rezept zur Transformation hat man also bei der Transformation

$$y = \varphi(x), \quad dy = |\det D\varphi(x)| dx$$

einzusetzen. Man schreibt daher auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(y_1, \dots, y_n)}{d(x_1, \dots, x_n)} := \det D\varphi.$$

Die Transformation φ ist ja ein Homöomorphismus und induziert daher einen Isomorphismus $\varphi : A \mapsto \varphi A$ der Borelalgebren. Nimmt man für f die charakteristische Funktion einer meßbaren Menge $\varphi A \subset V$, und bezeichnet λ das Lebesguemaß, so besagt der Satz:

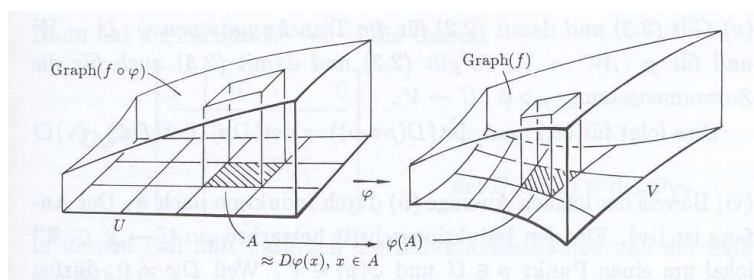
(2.3) Maßtransformation. *Unter den Voraussetzungen von (2.2) ist für jede meßbare Menge A in U*

$$\lambda(\varphi A) = \int_A |\det D\varphi(x)| dx.$$

Beachte, daß dies eine Gleichung von Maßen auf U ist.

Zunächst wollen wir uns anschaulich machen, was der Satz eigentlich bedeutet. Denken wir uns A als kleinen Würfel um x , so ist $\varphi|_A$ nahezu affin, mit linearem Anteil $D\varphi(x)$, und $D\varphi(x) \cdot A$ ist ein Spat vom Volumen $|\det D\varphi(x)| \cdot \lambda(A)$.

Wem aus der Linearen Algebra die Deutung der Determinante als orientiertes Volumen des Bildspats des Einheitswürfels nicht vertraut ist, der sollte sich darauf besinnen, daß die definierenden Eigenschaften der Determinante naheliegende Forderungen an so ein Volumen aussprechen.



Beweis der Transformationsformel in sechs Schritten (i) - (vi):

(i) Gilt (2.3) für $\varphi : U \rightarrow V$, so gilt (2.2) für dasselbe φ .

Ist f eine Treppenfunktion so folgt aus (2.3) und Linearität sofort, daß $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$ integrabel ist, und die Formel gilt. Daraus erhält man diese Richtung allgemein zum Beispiel mit dem Normkonvergenzatz. Ist umgekehrt $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$ integrabel, so transformiere mit φ^{-1} zurück, und nach dem schon Gesagten folgt, daß f integrabel ist, und die Formel gilt. (i) \square

(ii) Es genügt, folgende lokale Aussage zu zeigen: Jeder Punkt $p \in U$ hat eine offene Umgebung W , sodaß die Behauptung (2.3) für die Transformation $\varphi|_W : W \rightarrow \varphi W$ gilt.

Man hat dann nämlich eine abzählbare Überdeckung $(W_j \mid j \in \mathbb{N})$ von U mit solchen offenen Mengen W_j , etwa Kugeln mit rationalem Radius und Mittelpunkt. Dann zerlegt man A disjunkt in Teile $A_j \subset W_j$ und bemerkt, daß beide Seiten von (2.3) für solche Zerlegungen σ -additiv sind. (ii) \square

(iii) (2.3) gilt, wenn φ eine Permutation von Koordinaten ist. (iii) \square

(iv) (2.3) gilt für $n = 1$, also $U \subset \mathbb{R}$.

Die Maße $A \mapsto \lambda(\varphi A)$ und $A \mapsto \int_A |\varphi'| dx$ auf U stimmen (nach (2.1) mit $f = 1$) für Intervalle A überein, also auch für endliche disjunkte Vereinigungen von Intervallen, und sie haben endlichen Wert für kompakte Intervalle, also U ist für beide Maße σ -endlich. Daher stimmen sie nach dem Satz von Hahn (III, 2.6) überein. (iv) \square

(v) Gilt (2.3) und damit (2.2) für die Transformationen $\psi : U \rightarrow W$ und für $\rho : W \rightarrow V$, so gilt (2.2) und damit (2.3) auch für die Zusammensetzung $\rho \circ \psi : U \rightarrow V$.

Dies folgt für (2.2) aus $\det(D(\rho \circ \psi)) = \det(D\rho) \cdot \det(D\psi)$. (v) \square

(vi) Beweis der lokalen Aussage (ii) durch Induktion nach n . Der Anfang ist (iv). Für den Induktionsschritt betrachte $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ lokal um einen Punkt $p \in U$ und $\varphi(p) \in V$. Weil $D\varphi \neq 0$, dürfen wir nach Permutation der Koordinaten in U und V annehmen:

$$\partial\varphi_1/\partial x_1(p) \neq 0.$$

Dann zerlege φ lokal um p wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ & \searrow \psi & \swarrow \rho = \varphi\psi^{-1} \\ & & W \end{array}$$

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(x), x_2, \dots, x_n), \quad \rho(y) = (y_1, \rho_2(y), \dots, \rho_n(y)).$$

Dies ψ ist in der Tat lokal um p invertierbar, denn die Jacobische ist

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \partial\varphi_1/\partial x_1 & & ? & \\ \hline & & 1 & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & 1 \end{array} \right] \quad (\text{weiße Stellen sind Null}).$$

Die Zerlegung des Diagramms lehrt mit (v): Man darf annehmen, daß φ eine Koordinate festläßt, und dann nach Permutation der Koordinaten wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit die erste. Also:

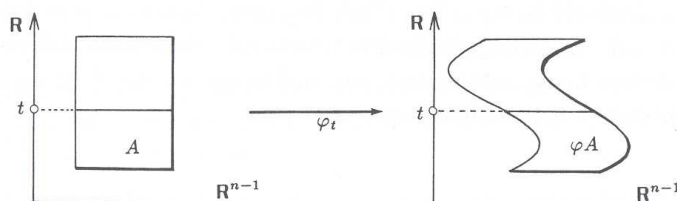
$$\begin{aligned} \varphi: (t, x) &\mapsto (t, \varphi_t(x)), \\ \varphi_t: U_t &:= U \cap \{x_1 = t\} \rightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dann hat die Jacobische von φ die Gestalt

$$D\varphi = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline ? & & & D\varphi_t \end{array} \right] \quad \det D\varphi(t, x) = \det D\varphi_t.$$

In diesem Fall hilft natürlich die Induktionsannahme und der Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \lambda_n(\varphi A) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi A)_t dt && \text{(Cavalieri)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi_t A_t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_t} |\det(D\varphi_t)| d\lambda_{n-1} \right) dt && \text{(Induktionsannahme)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{A_t} \cdot |\det D\varphi(t, x)| d\lambda_{n-1} \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \cdot |\det D\varphi| d\lambda_n && \text{(Fubini). } \square \end{aligned}$$



Wenden wir die Transformationsformel auf eine affine Transformation

$$\varphi : x \mapsto D \cdot x + v, \quad D \in \text{Aut}(\mathbb{R}^n), \quad v \in \mathbb{R}^n$$

an, so ist $D\varphi = D$, also wenn λ das Lebesguemaß bezeichnet, ist

$$(2.4) \quad \lambda(\varphi A) = |\det(D)| \cdot \lambda(A)$$

für jede meßbare Teilmenge A von \mathbb{R}^n . Dies gibt die geometrische Deutung der Determinante wieder, von der wir bei der Einführung der Transformationsformel ausgegangen sind. Wenn W ein Würfel der Kantenlänge 1 ist, ist danach $\lambda(D \cdot W + v) = |\det(D)|$. Das Vorzeichen der Determinante beschreibt die Orientierung der Abbildung. Das geht uns hier verloren, aber es wird auch in der Analysis wieder erscheinen, wenn es darum geht, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im Höherdimensionalen zu formulieren.

Eine **Bewegung** ist eine affine Abbildung, deren linearer Anteil D orthogonal ist. Dann ist $|\det D| = 1$, also sagt die Transformationsformel:

(2.5) Bewegungsinvarianz des Integrals. Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, so ist

$$\lambda(\varphi A) = \lambda(A)$$

für jede meßbare Teilmenge A von \mathbb{R}^n , und allgemein

$$\int_{\varphi A} f(x) dx = \int_A f\varphi(x) dx. \quad \square$$

Es gibt natürlich noch viele andere Diffeomorphismen mit Jacobideterminante 1. In der Theorie der Differentialgleichungen werden uns solche als divergenzfreie Flüsse begegnen. Immerhin zeigt sich hier, daß das Lebesgueintegral auf einem endlichdimensionalen euklidischen Raum wohldefiniert, und unabhängig von der Wahl eines euklidischen Koordinatensystems ist.

§ 3. Nullmengen

In geometrischen Untersuchungen treten maßtheoretische Argumente oft nur in der Form auf, daß gewisse Ausnahmemengen als Nullmengen zu erweisen sind. Dafür braucht es weiter keine Maßtheorie. Eine Nullmenge nennt man auch **dünn**; sie hat das äußere Maß Null, und das heißt nach (1.6):

(3.1) Erinnerung. Eine Teilmenge A von \mathbb{R}^n ist genau dann dünn, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Würfeln (W_j) in \mathbb{R}^n gibt, mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(W_j) < \varepsilon.$$

Dabei ist hier $\lambda(W)$ das Produkt der Kantenlängen. Statt Würfeln kann man auch achsenparallele Würfel, Quader oder auch Kugeln nehmen, denn jeder Würfel vom Durchmesser $2r$ liegt in einer Kugel vom Radius r und jede Kugel vom Radius r in einem Würfel der Kantenlänge $2r$, sodaß man immer ein Volumen bis auf eine Konstante durch das andere abschätzen kann.

(3.2) Satz. Ist A eine Nullmenge in \mathbb{R}^n und $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig, so ist auch $f(A)$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^n .

Beweis: Sei $(W_j \mid j \in \mathbb{N})$ eine Würfelüberdeckung von A mit $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(W_j) < \varepsilon$. Jeder Würfel W_j enthalte einen Punkt $a_j \in A$. Hat W_j die Kantenlänge s , so ist $\lambda(W_j) = s^n$ und $|x - a_j| \leq \sqrt{n} \cdot s$ für $x \in W_j$. Ist dann $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle x, y , so insbesondere $|f(x) - f(a_j)| \leq L\sqrt{n}s$ für $x \in W_j \cap A$. Daher liegt $f(W_j \cap A)$ in einem Würfel der Kantenlänge $2L\sqrt{n}s$ mit dem Volumen $k \cdot s^n = k \cdot \lambda(W_j)$, wo $k = (2L\sqrt{n})^n$ eine vom Würfel unabhängige Konstante ist. Also liegt $f(A)$ in der Vereinigung einer Folge von Würfeln mit Volumensumme höchstens $k \cdot \varepsilon$. \square

(3.3) Folgerung. Ist A eine Nullmenge in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar in einer offenen Umgebung U von A , so ist auch $f(A)$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^n .

Beweis: Man muß nur zeigen, daß f lokal einer Lipschitzbedingung genügt. Das folgt aus dem Mittelwertsatz

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 Df(x+th) dt \cdot h,$$

wenn man L so wählt, daß $|Df| \leq L$. Vergleiche (II, 1.5). \square

Demnach sind zum Beispiel differenzierbare Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ kleinerer Dimension dünn in \mathbb{R}^n , weil die Einbettung ja lokal über \mathbb{R}^k mit $k < n$ faktorisiert. Eine ähnliche Quelle dünner Mengen bietet die

(3.4) Bemerkung. *Ist A meßbar in \mathbb{R}^n und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar, so ist der Graph $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ dünn in \mathbb{R}^{n+1} .*

Beweis: Es genügt, dies für $A = \mathbb{R}^n$ zu zeigen, setze f durch 0 außerhalb A fort. Der Graph $\{(x, y) \mid y - f(x) = 0\}$ ist jedenfalls meßbar, und schneidet jede Gerade $\{x = \text{const}\}$ in genau einem Punkt, also in einer Nullmenge. Die Behauptung folgt daher nach Cavalieri. \square

Die Behauptung (3.2) gilt nicht für beliebige stetige Abbildungen, denn eine stetige Kurve kann einen Würfel ausfüllen. Es gibt auch Homöomorphismen der Ebene auf sich, die eine Strecke auf eine Menge von positivem Maß abbilden.

§ 4. Polar- und Zylinderkoordinaten

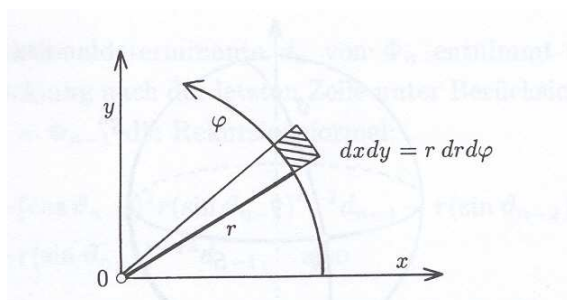
Wenn die Mengen oder Funktionen, die man messen oder integrieren will, besondere Symmetrien aufweisen, wird man die Koordinaten entsprechend symmetrisch wählen. Dafür bringen wir einige wichtige Beispiele.

(4.1) Polarkoordinaten der Ebene. *Dies ist die Transformation*

$$P : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Die Jacobimatrix von P ist

$$DP = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \det(DP) = r.$$



Die Transformation ist zwar am Ursprung singulär und hat für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ den gleichen Wert, aber für die Integralrechnung macht das nichts, weil die Mengen, die man im Bild- und Urbildraum herausnehmen muß, damit die Voraussetzungen der Transformationsformel erfüllt werden, das Maß Null haben. Das gilt ebenso für die folgenden Koordinatensysteme.

Im Höherdimensionalen kann man zunächst die weiteren Koordinaten unverändert lassen. So erhält man für \mathbb{R}^3 die

(4.2) Zylinderkoordinaten.

$$(r, \varphi, z) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

mit *Jacobi-Determinante* r .

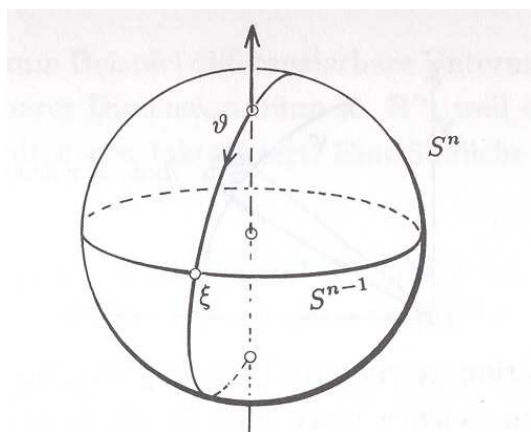
Polarkoordinaten gehen aus Koordinaten für die Sphäre bis auf eine Nullmenge hervor. Von der Sphäre S^{n-1} kommt man dann zum \mathbb{R}^n durch die Transformation

$$(4.3) \quad \mathbb{R}_+ \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (r, \xi) \mapsto r \cdot \xi.$$

Koordinaten für die Sphäre entstehen induktiv durch die Transformation

$$(4.4) \quad S^{n-1} \times [0, \pi] \rightarrow S^n, \quad (\xi, \vartheta) \mapsto (\sin \vartheta \cdot \xi, \cos \vartheta),$$

die den Rand $S^{n-1} \times \{0, \pi\}$ auf den Nord- und Südpol $(0, \pm 1)$ von S^n abbildet und im übrigen regulär ist.



So erhält man, von den ebenen Polarkoordinaten ausgehend, auf dem euklidischen Raum \mathbb{R}^3 die

(4.5) Kugelkoordinaten.

$$\Phi : (r, \varphi, \vartheta) \mapsto r(\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta),$$

für $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$

$$\det D\Phi = -r^2 \sin \vartheta.$$

So geht es induktiv weiter, und für \mathbb{R}^n hat man die

(4.6) Polarkoordinaten für \mathbb{R}^n .

$$\begin{aligned} \Phi_n(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}) \\ = (\sin \vartheta_{n-2} \cdot \Phi_{n-1}(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-3}), r \cos \vartheta_{n-2}), \end{aligned}$$

für $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta_j \leq \pi$.

Die Jacobimatrix hat die Gestalt

$$D\Phi_n = \left[\begin{array}{c|c} \sin \vartheta_{n-2} D\Phi_{n-1} & \cos \vartheta_{n-2} \Phi_{n-1} \\ \hline \cos \vartheta_{n-2}, 0, \dots, 0 & -r \sin \vartheta_{n-2} \end{array} \right]$$

Für die Funktionaldeterminante d_n von Φ_n entnimmt man daraus durch Entwicklung nach der letzten Zeile unter Berücksichtigung von $r \partial/\partial r \Phi_{n-1} = \Phi_{n-1}$ die Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} d_n &= -(\cos \vartheta_{n-2})^2 r (\sin \vartheta_{n-2})^{n-2} d_{n-1} - r (\sin \vartheta_{n-2})^n d_{n-1} \\ &= -r (\sin \vartheta_{n-2})^{n-2} d_{n-1}, \quad \text{also} \end{aligned}$$

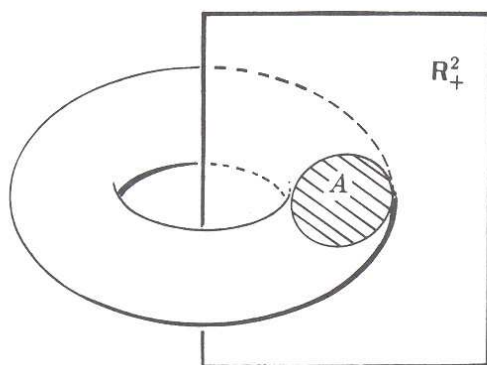
$$(4.7) \quad d_n = (-)^n r^{n-1} \cdot \sin \vartheta_1 \cdot (\sin \vartheta_2)^2 \cdot \dots \cdot (\sin \vartheta_{n-2})^{n-2}.$$

Wir wollen uns den Nutzen solcher Transformation in einigen Anwendungen vor Augen führen. Zylinderkoordinaten sind angebracht, wenn die zu integrierende Funktion rotationssymmetrisch um die z -Achse ist. Betrachten wir zum Beispiel eine meßbare Menge in der positiven Halbebene:

$$A \subset \mathbb{R}_+^2 := \{(r, z) \mid r > 0\}.$$

Durch Rotation um die z -Achse entsteht daraus der Rotationskörper

$$V = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \mid (r, z) \in A, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$



Das Volumen von V ist

$$\lambda_3(V) = \int \chi_A(r, z) r \, dr \, dz \, d\varphi = 2\pi \int_A r \, dr \, dz.$$

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt der Punkt

$$S = \frac{1}{\lambda_n(A)} \cdot \int_A x \, dx \in \mathbb{R}^n$$

der **Schwerpunkt** von A . Beachte, daß dieser Punkt invariant unter affinen Koordinatentransformationen ist. Bei unserem Ergebnis für $\lambda_3(V)$ ist also das Integral

$$R = \frac{1}{\lambda_2(A)} \int_A r \, dr \, dz$$

der Abstand vom Schwerpunkt von A zur z -Achse. Die Rechnung hat damit ergeben:

(4.8) Guldinsche Regel. $\lambda_3(V) = 2\pi R \cdot \lambda_2(A)$,
 $R = \text{Abstand des Schwerpunkts von } A \text{ zur Rotationsachse.}$ \square

Als Anwendung der Polarkoordinaten für die Ebene berechnen wir ein wichtiges uneigentliches Integral auf dem Weg übers Zweidimensionale:

$$(4.9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy \right) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r \, d\varphi \, dr = \pi \int_0^{\infty} 2re^{-r^2} \, dr = \pi [-e^{-r^2}]_0^{\infty} = \pi. \quad \square \end{aligned}$$

Das Integral ist uns schon im ersten Semester begegnet. Die Transformation $x^2 = t$, $2x \, dx = dt$, zeigt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} \, dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Schauen wir mal, was derselbe Gedanke allgemeiner über die Gammafunktion lehrt: Aus

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-x} dx$$

wird durch die Transformation $x = s^2/2$, $dx = s ds$:

$$\Gamma(u) = 2^{1-u} \int_0^{\infty} s^{2u-1} \exp(-s^2/2) ds.$$

Das Produkt $\Gamma(u) \cdot \Gamma(v)$ ist also

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= 2^{2-u-v} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} s^{2u-1} t^{2v-1} \exp(-(s^2 + t^2)/2) ds dt = \\ &= 2^{2-u-v} \int_0^{\infty} r^{2(u+v)-1} \exp(-r^2/2) dr \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{2u-1} (\sin \varphi)^{2v-1} d\varphi. \end{aligned}$$

Das erste Integral im letzten Term ist $2^{u+v-1}\Gamma(u+v)$, und man setzt

$$B(u, v) := 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{2u-1} (\sin \varphi)^{2v-1} d\varphi.$$

Dies ist die Eulersche **Betafunktion**. Wir haben gefunden:

$$(4.10) \quad B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \quad \square$$

Für $u = v = 1/2$ ergibt sich $B(u, v) = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi$, also $\Gamma(1/2)^2 = \pi\Gamma(1) = \pi$ wie in (4.9). Aber auch an ein anderes noch loses Ende können wir jetzt anknüpfen: Für das Volumen c_n des n -Balls vom Radius 1 hatten wir in (1.9) die Rekursionsformel

$$c_n = c_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t dt = c_{n-1} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$$

gefunden. Der Faktor nach c_{n-1} ist $B(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2})$, also:

$$c_n = c_{n-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Auch ist $c_1 = 2$, und mit $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, erhält man induktiv:

$$(4.11) \quad c_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)}.$$

Für gerades $n = 2k$ ist $\Gamma(n/2 + 1) = \Gamma(k + 1) = k!$, also:

$$c_{2k} = \pi^k / k!.$$

Für ungerades $n = 2k + 1$ erhält man entsprechend:

$$c_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k + 1)}.$$

Aus beidem zusammen ergibt sich die auf den ersten Blick verwunderliche Feststellung, daß das Volumen des n -Balls vom Radius 1 für $n \rightarrow \infty$ gegen Null geht. Beim Übergang vom n -Dimensionalen zum $(n + 1)$ -Dimensionalen wird eben jedesmal vom Zylinder über dem n -Ball etwas weggeschnitten, um zum $(n + 1)$ -Ball zu kommen, und wie sich zeigt, bleibt so auf die Dauer nichts übrig.

Die Kugel vom Radius r in \mathbb{R}^n hat nach (IV, 1.8) das Volumen $r^n c_n$, und es liegt nahe, in der Ableitung dieses Volumens nach r das $(n - 1)$ -dimensionale Volumen der Randsphäre $r \cdot S^{n-1}$ zu sehen. So erhalten wir

$$(4.12) \quad \text{vol}(r \cdot S^{n-1}) = n \cdot r^{n-1} c_n$$

für diese Größe. Wir werden darauf in der globalen Integrationstheorie zurückkommen (vergl. Bd. 3, VI, 5.7).