## Kapitel IV
# Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

*He had bought a large map representing the sea,*
*Without the least vestige of land:*
*And the crew were much pleased when they found it to be*
*A map they could all understand.*

*Carroll*

Wir haben im zweiten Band schon über $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n+k}$ gesprochen, aber wenn man dabei stehenbleibt, so sieht man sich auf die Dauer allzusehr behindert: Wir werden die Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und differenzierbaren Abbildungen beschreiben. Nur so zeigt sich die Natürlichkeit, das Funktorielle der globalen Analysis, und erst dadurch werden viele sehr konkrete Anwendungen formulierbar. In den ersten beiden Paragraphen erinnern wir an Redeweisen der allgemeinen Topologie und an grundlegende Formeln der Integralrechnung für Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann beschreiben wir differenzierbare Mannigfaltigkeiten und ihre Tangentialräume. Schließlich konstruieren wir glatte Partitionen der Eins auf Mannigfaltigkeiten als allgegenwärtiges Hilfsmittel des Übergangs vom Lokalen zum Globalen.

## § 1. Mengenlehre

Ich erinnere an den Begriff eines topologischen Raumes (vergl. Bd. 1, VI, § 4 — 8). Ein **topologischer Raum** besteht aus einer Menge $X$ und einer **Topologie** auf $X$. Die Topologie besteht aus einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von $X$, die **offen** heißen. Man fordert:

**(1.1) Axiome der Topologie.** *Die leere Menge und $X$ sind offen. Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.*

Ist $X$ ein topologischer Raum und $p \in X$, so heißt eine Teilmenge $V \subset X$ eine **Umgebung** von $p$, wenn es eine offene Menge $U$ mit $p \in U \subset V$ gibt. Der Raum $X$ heißt **hausdorffsch**, wenn verschiedene Punkte von $X$ stets disjunkte Umgebungen besitzen.

Wir werden nur hausdorffsche Räume betrachten. Man spricht auch von Umgebungen $V \subset X$ einer Teilmenge $P \subset X$ ebenso wie für einen Punkt, wenn es eine offene Menge $U$ mit $P \subset U \subset V$ gibt.

Ein hausdorffscher topologischer Raum $X$ heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von $X$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Für einen kompakten Raum gelten wesentlich stärkere Trennungseigenschaften: Ein hausdorffscher Raum $X$ heißt **regulär**, wenn jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ und jeder Punkte $p \in X \setminus A$ disjunkte Umgebungen besitzen, und er heißt **normal**, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen disjunkte Umgebungen besitzen. Durch Übergang zu Komplementen erhält man, daß ein hausdorffscher Raum genau dann regulär ist, wenn jede (offene) Umgebung jedes Punktes $p$ eine abgeschlossene Umgebung enthält.

**(1.2) Satz.** *Kompakte Räume sind normal.*

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, daßsie regulär sind. Sei also $X$ kompakt, $p \in X$ und $A$ abgeschlossen in $X$ mit $p \notin A$. Wie erinnerlich, ist auch $A$ kompakt. Weil $X$ hausdorffsch ist, können wir zu jedem $q \in A$ disjunkte Umgebungen $U_q$ von $p$ und $V_q$ von $q$ finden. Endlich viele dieser $V_q$ überdecken $A$. Ihre Vereinigung ist eine Umgebung $V$ von $A$, und der Durchschnitt der zugehörigen endlich vielen $U_q$ die dazu disjunkte Umgebung $U$ des Punktes $p$.

Jetzt wiederholen wir denselben Schluß mit einer zu $A$ fremden abgeschlossenen Teilmenge $P$ statt $p$, wobei wir den ersten Teil schon auf $P$ und $q \in A$ anwenden können, und erhalten disjunkte Umgebungen von $P$ und $A$. □

Ein hausdorffscher topologischer Raum heißt **lokal kompakt**, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Aus einem lokal kompakten Raum $X$ macht man durch Hinzunahme eines neuen Punktes $\infty$ einen kompakten Raum $X^\infty = X \cup \{\infty\}$, die **Alexandroff-Kompaktifizierung**. Eine Teilmenge $U \subset X^\infty$ ist genau dann offen, wenn ihr Schnitt mit $X$ offen in $X$ ist und, falls $\infty \in U$, noch das Komplement einer kompakten Teilmenge von $X$ in $U$ liegt. Die Umgebungen von $\infty$ sind also die Mengen, die $\infty$ und das Komplement eines Kompaktums von $X$ enthalten.

Durch diese Konstruktion kann man manche Aussagen von kompakten auf lokal kompakte Räume übertragen, zum Beispiel:

**(1.3) Bemerkung.** *Lokal kompakte Räume sind regulär.*

**Beweis:** In der Tat, Unterräume regulärer Räume sind regulär. □

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ lokal kompakter Räume heißt **eigentlich**, wenn die Urbilder $f^{-1}(K)$ kompakter Teilmengen $K \subset Y$ stets kompakt sind. Das heißt gerade, daß die Fortsetzung

$$f^\infty : X^\infty \to Y^\infty, \qquad \infty \mapsto \infty,$$

von $f$ auch stetig (im Punkt $\infty$) ist. Durch diese Beschreibung sieht man:

**(1.4) Bemerkung.** *Eine eigentliche Bijektion zwischen lokal kompakten Räumen ist ein Homöomorphismus.*

**Beweis:** Ist $f : X \to Y$ die Bijektion, so ist $f^\infty : X^\infty \to Y^\infty$ eine stetige Bijektion kompakter Räume, also ein Homöomorphismus (Bd. 1, VI, 7.4). □

Um die Topologie eines Raumes $X$ festzulegen, braucht man nicht alle offenen Mengen anzugeben, ja wenn man eine beliebige Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von $X$ als offen auszeichnet, so gibt es eine wohlbestimmte von $\mathcal{S}$ **erzeugte** Topologie auf $X$, deren offene Mengen die beliebigen Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$ sind. Für Induktionsargumente ist es günstig, wenn die Topologie durch Angabe von abzählbar vielen offenen Mengen beschrieben werden kann.

Sei $X$ ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{B}$ offener Mengen von $X$ heißt eine **Basis** der Topologie von $X$, wenn jede offene Menge von $X$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. Wir werden Räume betrachten, die eine abzählbare Basis der Topologie besitzen.

**(1.5) Satz.** *Ein metrischer Raum besitzt genau dann eine abzählbare Basis der Topologie, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.*

**Beweis:** Wählt man in jeder nicht leeren Menge der Basis $\mathcal{B}$ des Raumes $X$ einen Punkt aus, so erhält man eine dichte Teilmenge $T$, denn jede nicht leere offene Menge muß $T$ treffen. Ist umgekehrt $T$ eine abzählbare dichte Teilmenge, so sieht man leicht, daß die offenen Kugeln um Punkte aus $T$ mit rationalem Radius

$$K(t,\varepsilon) = \{x \mid d(x,t) < \varepsilon\}, \qquad t \in T, \qquad \varepsilon \in \mathbb{Q}_+,$$

eine Basis von $X$ bilden. □

Auch Teilräume eines Raumes $X$ mit abzählbarer Basis haben eine abzählbare Basis, durch Schnitt der Basismengen von $X$ mit dem Teilraum. So haben insbesondere alle Teilräume von $\mathbb{R}^n$ eine abzählbare Basis, weil $\mathbb{R}^n$ die dichte Teilmenge $\mathbb{Q}^n$ hat.

**(1.6) Satz.** *Hat der topologische Raum $X$ eine abzählbare Basis, so besitzt jede offene Überdeckung von $X$ eine abzählbare Teilüberdeckung.*

**Beweis:** Sei $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ die offene Überdeckung und $(V_n \mid n \in \mathbb{N})$ die Familie derjenigen Mengen der Basis, die jeweils in einer der Mengen $U_\lambda$ liegen. Die $V_n$, $n \in \mathbb{N}$, überdecken $X$, weil ja jedes $U_\lambda$ eine Vereinigung von gewissen $V_n$ ist. Wähle nun zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\lambda = \lambda(n)$ mit $V_n \subset U_{\lambda(n)}$, dann ist $(U_{\lambda(n)} \mid n \in \mathbb{N})$ die gesuchte abzählbare Teilüberdeckung. □

Diese Überdeckungseigenschaft erinnert nicht nur äußerlich an die der kompakten topologischen Räume. Später werden wir es mit abzählbaren und **lokal endlichen** Überdeckungen $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ zu tun haben; das heißt, jeder Punkt hat eine Umgebung, die nur endlich viele $U_\lambda$ trifft.

Soviel zur Erinnerung an topologische Redeweisen. Im übrigen verweisen wir auf die Erklärungen am Ende des ersten Bandes.

## § 2. Lokale Integralrechnung

Wenngleich die feineren Techniken der Lebesgueschen Integrationstheorie, die wir im zweiten Band erklärt haben, ein unumgängliches Hilfsmittel der Analysis sind, ist das folgende doch bei viel geringeren Vorkenntnissen zu verstehen. Alles Technische, wie insbesondere die Voraussetzungen an die "Partitionen der Eins", haben wir so eingerichtet, daß auch das Riemann-Integral allen Ansprüchen genügt. Wir fassen nun zusammen, was man über ein Integral von Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ wissen sollte.

Zu einem solchen Integral gehört zunächst ein reeller Vektorraum $F$ reeller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, der Raum der **integrablen** Funktionen. Im Falle des Riemannintegrals besteht $F$ aus den beschränkten fast überall stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Dies letztere bedeutet, daß die Funktionen außerhalb einer kompakten Menge verschwinden.

**Zur Erinnerung:** Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **dünn**, oder **fast alle** $x \in \mathbb{R}^n$ liegen nicht in $A$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Würfeln $W_k \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$, und so daß die Summe der Volumina der $W_k$ kleiner als $\varepsilon$ ist. Bei den Riemann-integrablen Funktionen ist in diesem Sinne die Menge der Unstetigkeitspunkte dünn.

Es wird genügen, wenn $F$ im folgenden die genannten Funktionen jedenfalls enthält. Das **Integral** ist dann ein monotones lineares Funktional auf $F$, also eine Abbildung

$$\int_{\mathbb{R}^n} : F \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f =: \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx_1 \cdots dx_n,$$

so daß gilt

(i) $\int(\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
(ii) Aus $f \leq g$ folgt $\int f \leq \int g$.

Auch braucht man eine Normierung, wie etwa die folgende: Ist $f$ die charakteristische Funktion eines achsenparallelen Würfels im $\mathbb{R}^n$, so ist $\int f$ das elementare Volumen (Produkt der Seitenlängen) des Würfels.

Die **charakteristische Funktion** $\chi_A$ einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$

Man definiert $\int_A f := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \cdot f$ und $\mathrm{vol}_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A$.

Beides ist freilich nur definiert, wenn die Funktionen $\chi_A$ bzw. $f \cdot \chi_A$ integrabel sind. Allein aus dem Gesagten folgt schon die Abschätzung

$$|\int_A f| \leq \int_A |f| \leq \sup(|f|) \cdot \mathrm{vol}_n(A)$$

und insbesondere die

**(2.1) Stetigkeit des Integrals.** *Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvergiert die Folge $(f_n : K \to \mathbb{R})$ gleichmäßig gegen die (integrable) Funktion $f : K \to \mathbb{R}$, so ist*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Dies gilt von jedem auch noch so bescheidenen Integral, und die Grenzfunktion $f$ ist auch für die geläufigen Integrale von selbst wieder integrabel.

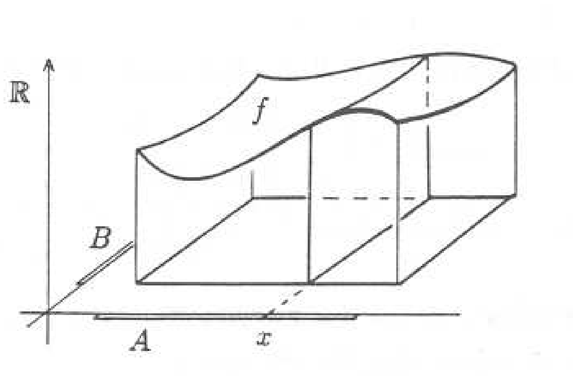
Die beiden wichtigsten Sätze zur Berechnung mehrdimensionaler Integrale, wie auch zum Verständnis des folgenden, sind der Satz von Fubini und die Transformationsformel. Beim Satz von Fubini zeigt das Lebesgue-Integral schon seine Überlegenheit, aber uns genügt die folgende sehr schwache Aussage (vergl. Bd. 2, IV, 1.6).

**(2.2) Folgerung aus dem Satz von Fubini.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ und die Funktion $f : A \times B \to \mathbb{R}$ sei integrabel als Funktion von $n+m$ Variablen. Für jedes $x \in A$ sei auch* *die durch* $f_x(y) := f(x,y)$ *definierte Funktion von* $m$ *Variablen* $f_x : B \to \mathbb{R}$ *integrabel. Dann ist auch die Funktion von* $n$ *Variablen*

$$u : A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_B f_x(y)\, dy$$

*integrabel, und es gilt*

$$\int_{A\times B} f = \int_A u(x)\, dx =: \int_A \Big(\int_B f(x,y)\, dy\Big)\, dx.$$



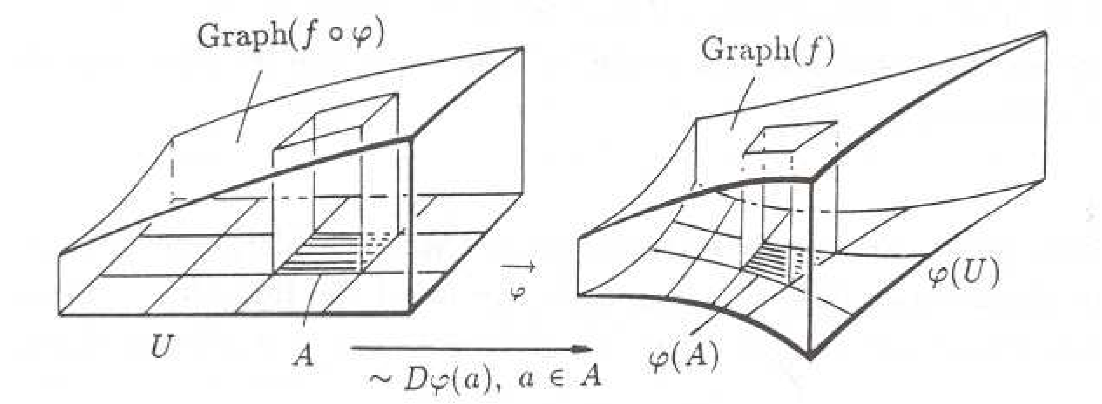

Dieser Satz rechtfertigt auch die Schreibweise eines Integrals auf dem $\mathbb{R}^n$ als iteriertes eindimensionales Integral

$$\int f(x)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Das wichtigste lokale Ergebnis für alles folgende ist die Transformationsformel für Integrale (vergl. Bd. 2, IV, 2.2). Ist $\varphi$ eine differenzierbare Transformation, so ist die Ableitung $D\varphi$ an jeder Stelle als lineare Abbildung die lineare Approximation von $\varphi$, und die Determinante $\det D\varphi$ gibt an, wie sich ein Volumen (etwa des Einheitswürfels) bei dieser linearen Abbildung verändert. Wenn man sich nun vorstellt, daß eine differenzierbare Abbildung sich im Kleinen etwa linear verhält, kommt man zu der

**(2.3) Transformationsformel.** *Sei* $U$ *offen in* $\mathbb{R}^n$ *und sei* $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ *injektiv, stetig differenzierbar, und die Jacobideterminante* $\det D\varphi(x)$ *verschwinde in keinem Punkt* $x \in U$. *Ist dann* $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ *integrabel, so ist*

$$\int_U f\circ\varphi(x) \cdot |\det D\varphi(x)|\, dx = \int_{\varphi U} f(y)\, dy.$$




Hieraus folgt zum Beispiel die Invarianz des Integrals unter Bewegungen: Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, so ist

$$\int_U f \circ \varphi = \int_{\varphi U} f,$$

denn $|\det D\varphi| = |\det \varphi| = 1$.

Die Determinante kann man schon aus ihren algebraischen Eigenschaften als orientiertes Volumen des $n$-Spates ihrer Spalten deuten: Sie ist eine alternierende $n$-Form. Ihr Auftreten in der Transformationsformel ist der Grund für die Bedeutung der alternierenden Formen in der Analysis. In Rechnungen notiert man die Transformationsformel, indem man schreibt:

$$y = \varphi(x),\ dy = dy_1 \dots dy_n = |\det D\varphi| \cdot dx = \left|\frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right| \cdot dx_1 \dots dx_n,$$

mit

$$\frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} := \det D\varphi.$$

Die Transformationsformel beschreibt, wie Integranden bei krummlinigen Koordinatentransformationen zu transformieren sind. Sie ist der eigentliche Schlüssel beim Übergang vom Lokalen zum Globalen, von offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ zu Mannigfaltigkeiten. Alles folgende, wenn man will, ist eine Meditation über die Transformationsformel.

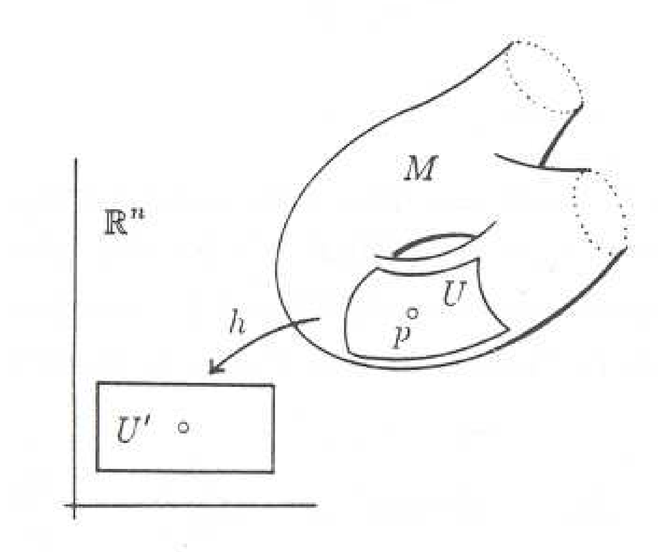
## § 3. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Wir werden für die Definition differenzierbarer Strukturen und auch später vielfach glatte, also $C^\infty$-differenzierbare Abbildungen zugrundelegen; nicht daß diese Voraussetzung immer notwendig wäre — man käme wohl meist mit zweimal stetig differenzierbaren Abbildungen aus — aber wir suchen möglichst glatte Formulierungen, und man kann sich allgemein überlegen, daß so nichts Wesentliches verlorengeht. So wollen wir jetzt die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten vorstellen, auf denen sich im folgenden alles analytische Leben abspielen wird.

**Definition.** *Eine $n$-dimensionale (topologische)* **Mannigfaltigkeit** $M^n$ *ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie, der* **lokal euklidisch** *ist. Dies bedeutet, daß es zu jedem Punkt* $p \in M$ *eine offene Umgebung* $U$ *von* $p$ *und einen Homöomorphismus*

$$h : U \to U'$$

*mit einer offenen Menge* $U' \subset \mathbb{R}^n$ *gibt. Ein solcher Homöomorphismus* $(h, U)$ *heißt* **Karte** *oder* **lokales Koordinatensystem** *von* $M$ *um* $p$ *mit dem* **Kartengebiet** $U$.




Die Dimension $\dim M = n$ ist zwar tatsächlich durch den topologischen Raum $M$ schon bestimmt, wenn $M$ nicht leer ist, aber für uns gehört zur Struktur einer Mannigfaltigkeit stets die Angabe einer Dimension, also eines $\mathbb{R}^n$, in dem die Karten landen. Oft, aber nicht immer, notieren wir die Dimension als Exponent, wie hier in der Definition.

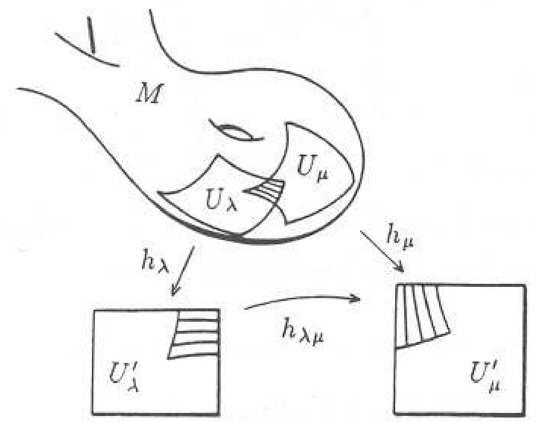
Eine Menge $\{(h_\lambda, U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ von Karten heißt **Atlas** von $M$, wenn $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ eine Überdeckung von $M$ ist. Wählt man einen Atlas für $M$, so kann man lokale Betrachtungen in der Umgebung eines Punktes $p \in M$ stets mit Hilfe der Karte $h : U \to U'$ durch lokale Betrachtung um $h(p) \in U' \subset \mathbb{R}^n$ ersetzen, die Mannigfaltigkeit sieht lokal so aus wie der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$. Natürlich kann man die Karte $h$ so einrichten, daß $h(p) = (0, \ldots, 0)$ und $U'$ eine Umgebung des Ursprungs in $\mathbb{R}^n$ ist. Für kleine $x \in \mathbb{R}^n$ entspricht dann vermöge der Karte $h$ jedem $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eindeutig ein Punkt $h^{-1}(x) \in M$, und so wird eine Umgebung von $p$ durch euklidische Koordinaten beschrieben. Man bezeichnet daher auch die Karte selbst gern mit

$$x = (x_1, \ldots, x_n) : U \to U' \subset \mathbb{R}^n,$$

und durch diese Karte entspricht dann jedem reellen $n$-Tupel in $U' \subset \mathbb{R}^n$ eindeutig ein Punkt in $U \subset M$, der nämlich, dessen Koordinaten $(x_1, \dots, x_n)$ als Wert das $n$-Tupel haben. Freilich gibt es im allgemeinen in einem Atlas viele Karten, deren Gebiet den Punkt $p$ enthält, und wenn man eine Erklärung bezüglich einer Karte gegeben hat, muß man überlegen, was bei Kartenwechsel geschieht:
Seien $(h_\lambda, U_\lambda)$ und $(h_\mu, U_\mu)$ Karten von $M$, dann ist auf $h_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ die Abbildung

$$h_{\lambda\mu} := h_\mu \circ h_\lambda^{-1} : h_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to h_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

definiert. Sie heißt **Kartenwechsel** zwischen $h_\lambda$ und $h_\mu$.




Der Kartenwechsel gibt an, wie man von einer Karte, einem lokalen Koordinatensystem, zum anderen übergeht. Offenbar gilt

$$h_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}_{U'_\lambda}, \quad h_{\mu\nu} \circ h_{\lambda\mu} = h_{\lambda\nu}, \quad \text{also } h_{\lambda\mu} = h_{\mu\lambda}^{-1},$$

wo die jeweiligen Abbildungen definiert sind.

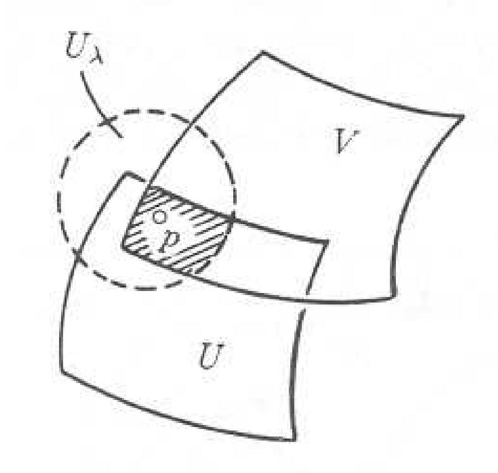
Alles Lokale in einer Mannigfaltigkeit kann man mit lokalen Koordinaten beschreiben. Der Kartenwechsel sagt, was beim Übergang von einem Koordinatensystem zum anderen geschieht.

Ein Atlas heißt **differenzierbar**, wenn alle seine Kartenwechsel $C^\infty$-differenzierbar sind. Sie sind dann Diffeomorphismen, weil $h_{\lambda\mu}^{-1} = h_{\mu\lambda}$.

Ist $\mathcal{A} = \{(h_\lambda, U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ ein differenzierbarer Atlas für $M$, und $(h, U)$ eine Karte für $M$, die vielleicht nicht zu $\mathcal{A}$ gehört, so heiße sie differenzierbar, wenn alle Kartenwechsel $h_\lambda \circ h^{-1}$, $h \circ h_\lambda^{-1}$ mit Karten aus $\mathcal{A}$ $C^\infty$-differenzierbar sind. Der Atlas $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ enthalte dann alle bezüglich $\mathcal{A}$ differenzierbaren Karten.

**(3.1) Bemerkung.** *Der Atlas $\mathcal{D}$ aller bezüglich $\mathcal{A}$ differenzierbaren Karten ist der eindeutig bestimmte maximale differenzierbare Atlas, der $\mathcal{A}$ enthält, und sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ differenzierbare Atlanten, so ist $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{B})$ genau wenn $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ differenzierbar ist.*

**Beweis:** Der Atlas $\mathcal{D}$ ist differenzierbar. Seien nämlich $(h,U)$ und $(k,V)$ in $\mathcal{D}$. Man muß prüfen, ob der Kartenwechsel $k \circ h^{-1}$ differenzierbar ist. Dies muß man in der Umgebung jedes Punktes aus $h(U \cap V)$ prüfen. Aber $p \in U \cap V$ liegt auch im Gebiet einer Karte $(h_\lambda, U_\lambda)$ von $\mathcal{A}$, und lokal um $h(p)$ ist $k \circ h^{-1} = (k \circ h_\lambda^{-1}) \circ (h_\lambda \circ h^{-1})$ eine Zusammensetzung differenzierbarer Abbildungen.

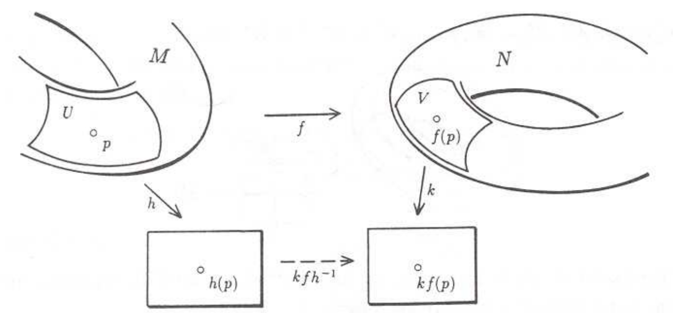



Offenbar ist der Atlas $\mathcal{D}$ maximal über $\mathcal{A}$, er kann nicht durch weitere Hinzunahme von Karten als differenzierbarer Atlas vergrößert werden. □

**Definition.** *Eine* **differenzierbare Struktur** *auf einer $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M$ ist ein maximaler differenzierbarer Atlas $\mathcal{D}$ auf $M$. Eine $n$-dimensionale* **differenzierbare Mannigfaltigkeit** *ist eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit zusammen mit einer differenzierbaren Struktur für diese Mannigfaltigkeit.*

Wir werden nur noch mit differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zu tun haben. Wir setzen daher von jeder Karte und jedem Atlas voraus, daß sie differenzierbar sind, und bezeichnen die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit einem Buchstaben $M, N, \ldots$ ohne den Atlas zu nennen. Wenn man eine differenzierbare Struktur durch einen Atlas angeben will, wird man natürlich nicht versuchen, einen maximalen Atlas explizit zu beschreiben, sondern man wird vielmehr einen möglichst kleinen Atlas nennen, der ja dann einen maximalen eindeutig festlegt. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind die Objekte, die wir betrachten, und ihre Abbildungen sind

**Differenzierbare Abbildungen.** *Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten heißt $C^k$-***differenzierbar** *im Punkt $p \in M$, wenn für eine (und damit jede) Karte $(h,U)$ um $p$ und $(k,V)$ um $f(p)$ die Zusammensetzung $k \circ f \circ h^{-1}$ lokal um $h(p)$ entsprechend $C^k$-differenzierbar ist. Sie ist lokal um $h(p)$, nämlich auf $h(U \cap f^{-1}V)$ definiert.*




Daß diese Definition von der Wahl der Karten nicht abhängt, liegt gerade daran, daß die Kartenwechsel alle $C^\infty$-differenzierbar sind. Die Abbildung $f$ heißt **differenzierbar**, wenn sie an jeder Stelle $p \in M$ differenzierbar ist, und **diffeomorph**, wenn $f^{-1}$ existiert und auch differenzierbar ist. Diese Erklärungen sind sinnvoll für $C^k$-Abbildungen mit beliebigem $k$ und auch für nur einmal (bei $p \in M$) differenzierbare Abbildungen. Diffeomorphe Mannigfaltigkeiten haben gleiche Dimension, es sei denn, es handelt sich um die leere Mannigfaltigkeit. Das zeigt der Satz über die Umkehrabbildung. Sind die Abbildungen

$$f : M \to N, \quad g : N \to L$$

$k$-mal stetig differenzierbar, so auch die Zusammensetzung $g \circ f : M \to L$, und $\mathrm{id} : M \to M$ ist differenzierbar. Die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und differenzierbaren Abbildungen bilden eine Kategorie.

Ein offenbares Beispiel für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit dem Atlas, der nur die eine Karte $\mathrm{id} : U \to U$ enthält (und dem zugehörigen maximalen Atlas). Viele weitere Beispiele erhält man durch die grundlegenden Prinzipien der Konstruktion von Untermannigfaltigkeiten, Produkten von Mannigfaltigkeiten, Summen von Mannigfaltigkeiten und Quotientenmannigfaltigkeiten.

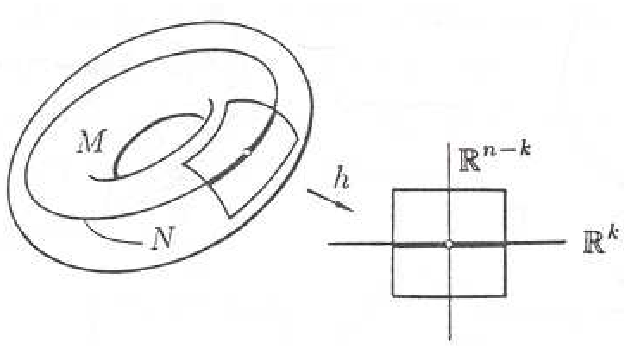
**Untermannigfaltigkeiten.** Sei $M^n$ eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt eine $k$-**dimensionale** , $(n-k)$-**kodimensionale**, **Untermannigfaltigkeit** von $M$, wenn es um jeden Punkt $p \in N$ eine differenzierbare Karte von $M$

$$h : U \to U' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$$

gibt, so daß

$$h(U \cap N) = U' \cap \mathbb{R}^k,$$

wobei wir wieder $\mathbb{R}^k := \mathbb{R}^k \times 0 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$ setzen.




Offenbar ist $N$ als Teilraum von $M$ hausdorffsch mit abzählbarer Basis, und aus den Karten $h$ der Definition erhält man Karten

$$h \mid U \cap N : \; U \cap N \to U' \cap \mathbb{R}^k,$$

die einen differenzierbaren Atlas auf $N$ erklären. Die Inklusion $N \hookrightarrow M$ ist differenzierbar und wird in geeigneten lokalen Koordinaten durch die Inklusion $\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ beschrieben.

Eine Abbildung $f : N \to M$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten heißt eine **Einbettung**, wenn $f(N) \subset M$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit, und $f : N \to f(N)$ diffeomorph ist.

Insbesondere sind die in (Bd. 2, II, § 3) erklärten Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ in unserem Sinne Beispiele differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Ist also $U$ offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^k$ $C^\infty$-differenzierbar, und ist $a \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert von $f$, so ist $f^{-1}\{a\} \subset U$ eine $k$-kodimensionale Untermannigfaltigkeit von $U$ und damit von $\mathbb{R}^n$. Die $n$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten einer $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit sind gerade die offenen Teilmengen.

**Produkte.** Gegeben seien die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $M^m$ und $N^n$, dann ist das Produkt $M \times N$ als Raum das topologische Produkt, und ein differenzierbarer Atlas ist durch folgende Karten gegeben: Sind

$$h : U \to U' \subset \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad k : V \to V' \subset \mathbb{R}^n$$

differenzierbare Karten von $M$ und $N$, so ist

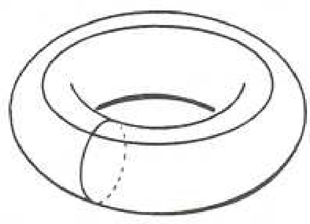
$$h \times k : U \times V \to U' \times V' \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$$

eine differenzierbare Karte von $M \times N$. Der Atlas dieser Karten definiert die differenzierbare Struktur auf $M \times N$.

Eine Abbildung $f = (f_1, f_2) : L \to M \times N$ ist genau dann differenzierbar, wenn beide Komponenten differenzierbar sind. Für die Stetigkeit ist uns das bekannt, und dann läuft die Behauptung lokal in Koordinaten darauf hinaus, daß eine Abbildung $U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^\ell$ genau dann differenzierbar ist, wenn die Komponenten differenzierbar sind, was wir wissen. Also wenn $C^k(\ ,\ )$ die Menge der $C^k$-differenzierbaren Abbildungen bezeichnet, so gilt:

$$C^k(L, M \times N) = C^k(L, M) \times C^k(L, N) \qquad (3.2)$$
$$f \mapsto (pr_1 \circ f,\ pr_2 \circ f).$$

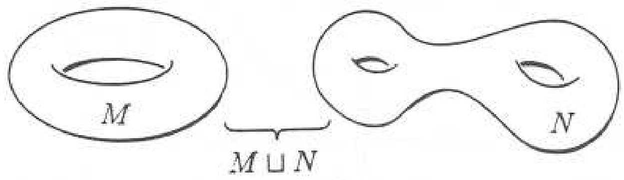
**Beispiel.** Der **Torus** $S^1 \times S^1$.



**Summen.** Sind $M$ und $N$ beide $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so wird die topologische Summe zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M \sqcup N$, oder manche schreiben auch $M + N$. Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ differenzierbare Atlanten von $M$ und $N$, so ist $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ein Atlas, der die differenzierbare Struktur von $M \sqcup N$ definiert. Wie für stetige Abbildungen gilt:

$$C^k(M \sqcup N, L) = C^k(M, L) \times C^k(N, L) \qquad (3.3)$$
$$f \mapsto (f \circ i_1,\ f \circ i_2),$$

wenn $i_1 : M \subset M \sqcup N$ und $i_2 = N \subset M \sqcup N$ die Inklusionen sind.




Beachte, daß $M$ und $N$ gleichdimensional sind!

**Quotientenmannigfaltigkeiten.** Das allgemeine Konstruktionsprinzip sei hier nicht beschrieben, aber ich erinnere an das schöne und wichtige Beispiel des **projektiven Raumes** $\mathbb{R}P^n$. Dieser ist der Quotient der Sphäre $S^n$ nach der Äquivalenzrelation $x \sim \pm x$ oder der Quotient von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ nach der Äquivalenzrelation $x \sim \lambda x$ für $\lambda \neq 0$. Noch anders gesagt: Die Punkte von $\mathbb{R}P^n$ entsprechen den Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{R}^{n+1}$. Einer solchen Geraden $G$ entspricht die Äquivalenzklasse $G \cap S^n$ in der ersten und $G \setminus \{0\}$ in der zweiten Beschreibung. Ein Punkt aus $\mathbb{R}P^n$ wird durch **homogene Koordinaten**

$$[\,x_0, \ldots, x_n\,] = [\,-x_0, \ldots, -x_n\,], \quad \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1,$$

oder

$$[x_0,\dots,x_n] = [\lambda x_0,\dots,\lambda x_n], \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (x_0,\dots,x_n) \neq (0,\dots,0),$$

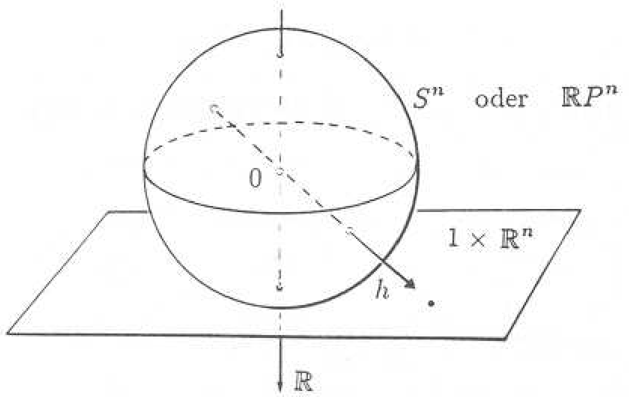
beschrieben, also $[x_0,\dots,x_n]$ bezeichnet die Äquivalenzklasse von $(x_0,\dots,x_n)$ aus $S^n$ oder $\mathbb{R}^{n+1}$. In jedem Fall sind die Mengen $U_i = \{[x] \mid x_i \neq 0\}$ offen in $\mathbb{R}P^n$, und die Abbildung

$$h_i : U_i \to \mathbb{R}^n,\ [x_0,\dots,x_n] \mapsto (x_0/x_i,\dots,x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i,\dots,x_n/x_i)$$

ist eine Karte; die Umkehrung ist

$$(y_1,\dots,y_n) \mapsto [y_1,\dots,y_i,1,y_{i+1},\dots,y_n].$$

Übrigens ist $U_i = \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1}$, man nimmt aus dem projektiven Raum eine geeignete projektive Hyperebene als "unendlich fern" heraus, und behält einen affinen Raum übrig. Die Karten bilden einen differenzierbaren Atlas. Die geometrische Bedeutung dieser Karten ist sehr anschaulich: Ist etwa $i=0$, so wird die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ vom Mittelpunkt her auf ihre Tangentialhyperebene $\{1\}\times\mathbb{R}^n$ im Punkt $(1,0)$ projiziert. Gegenüberliegende Punkte haben dasselbe Bild, die Projektion definiert also eine Abbildung des Quotienten $\mathbb{R}P^n$ der Sphäre. Die Sphäre $S^{n-1} = S^n \cap \{x_0 = 0\}$ wird nicht abgebildet.




Sie repräsentiert im Quotienten $\mathbb{R}P^n$ die "unendlich ferne" Hyperebene

$$\mathbb{R}P^{n-1} = \{[x] \in \mathbb{R}P^n \mid x_0 = 0\}.$$

Übrigens haben wir auf dem Bild nicht ohne Grund $\mathbb{R}$ so herum orientiert, daß die Sphäre oben auf der Hyperebene liegt; dreht man das Bild herum, so verliert es sehr an Anschaulichkeit, was natürlich nichts mit Mathematik zu tun hat, sondern viel mehr mit der durch Kultur und Menschlichkeit bestimmten Weise unseres Erkennens von Bildern.

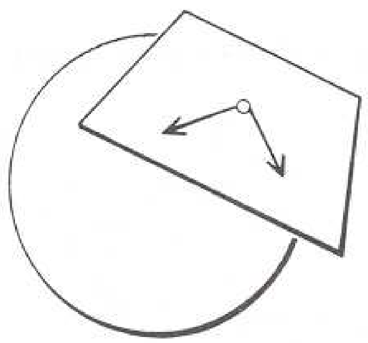
Man kann auch, um $\mathbb{R}P^n$ zu beschreiben, die obere offene Halbsphäre weglassen und nur auf dem Randäquator der unteren abgeschlossenen Halbsphäre (einer $n$-dimensionalen Kugel) antipodische Punkte identifizieren.

# § 4. Der Tangentialraum

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$, so haben wir den Tangentialraum $T_pM$ von $M$ im Punkte $p$ als Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ beschrieben, nämlich als den Raum der Vektoren

$$v = \dot{\alpha}(0)$$

wenn $\alpha$ ein differenzierbarer Weg in $M$ mit $\alpha(0) = p$ ist.



Jetzt sind unsere Mannigfaltigkeiten nicht mehr in einen euklidischen Raum eingebettet, so daß wir den Tangentialraum nicht mehr als Teilraum des $\mathbb{R}^n$ beschreiben können, jedoch liefert uns das Studium der Untermannigfaltigkeiten Hinweise, wie man allgemein jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit $M$ als Tangentialraum in kanonischer Weise einen Vektorraum $T_pM$ zuordnen kann, und jeder differenzierbaren Abbildung $f : M \to N$ ihre Tangentialabbildung $T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$. Es sind uns in der Tat drei verschiedene Weisen vorgekommen, wie man Tangentialvektoren beschreiben kann, nämlich

durch differenzierbare Kurven,
durch Beschreibung in lokalen Koordinaten,
durch Richtungsableitungen;

und wir nennen die Beschreibung des Tangentialraums, die man so erhält, entsprechend die Definition

des Geometers,
des Physikers,
des Algebraikers.

Wir werden diese drei Beschreibungen und ihren Zusammenhang jetzt im einzelnen erklären.

In jedem Fall kommt es dabei nur auf eine lokale Betrachtung der Mannigfaltigkeit in einer beliebig kleinen Umgebung des Punktes $p \in M$ an. Wir wollen eine Abbildung, die vielleicht nur lokal um $p \in M$ definiert ist, und über die wir auch nur in einer genügend kleinen Umgebung von $p$ etwas behaupten, durch

$$f : (M, p) \to (N, q)$$

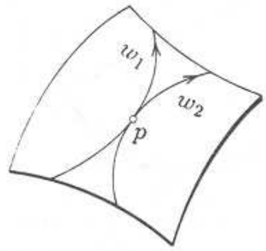
bezeichnen, wenn $f(p) = q$. Für Algebraiker werden wir das bald noch präziser fassen.

Die anschaulichste Beschreibung von Tangentialvektoren ist die geometrische. Wir betrachten zum Punkt $p$ der Mannigfaltigkeit $M$ die Menge aller jeweils auf einem Intervall um 0 definierten (einmal) differenzierbaren Wege $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $w(0) = p$, oder mit obiger Bezeichnung

$$w : (\mathbb{R}, 0) \to (M, p).$$

Zwei solche Wege $w_1, w_2$ heißen **tangential äquivalent**, wenn für eine (und damit jede) Karte $h$ um $p$ gilt

$$(h \circ w_1)^{\cdot}(0) = (h \circ w_2)^{\cdot}(0)$$




**Definition.** *Eine Äquivalenzklasse differenzierbarer Wege durch $p$ für die Relation "tangential äquivalent" heißt* **Tangentialvektor** *in $p$, und die Menge $T_pM$ aller Tangentialvektoren ist der (geometrische)* **Tangentialraum** *von $M$ in $p$. Eine lokal um $p \in M$ definierte differenzierbare Abbildung*

$$f : (M, p) \to (N, q)$$

*induziert die* **Tangentialabbildung** *(das* **Differential***)*

$$T_pf : T_pM \to T_qN, \quad [\,w\,] \mapsto [\,f \circ w\,].$$

Die Tangentialabbildung ist **funktoriell**, das heißt $T_p\mathrm{id} = \mathrm{id}$, und eine Zusammensetzung lokal definierter differenzierbarer Abbildungen

$$(M, p) \underset{f}{\longrightarrow} (N, q) \underset{g}{\longrightarrow} (L, r)$$

induziert

$$T_p(g \circ f) : T_pM \underset{T_pf}{\longrightarrow} T_qN \underset{T_qg}{\longrightarrow} T_rL,$$

also

$$T_qg \circ T_pf = T_p(g \circ f) : [\,w\,] \mapsto [\,g \circ f \circ w\,], \qquad q = f(p).$$

Man muß allerdings überlegen, daß die Tangentialabbildung unabhängig von der Wahl des Weges $w$ wohldefiniert ist, und daß die Relation "tangential äquivalent" nicht von der Karte $h$ abhängt. Zum letzteren: Ist $g$ ein Kartenwechsel, so ist

$$(g \circ h \circ w)^{\cdot} = Dg(h(p)) \cdot (h \circ w)^{\cdot} \tag{4.1}$$

und $Dg$ ist bijektiv, also wenn $(h \circ w_1)^{\cdot} = (h \circ w_2)^{\cdot}$, so ist $(g \circ h \circ w_1)^{\cdot} = (g \circ h \circ w_2)^{\cdot}$.

Zum ersteren: Wählt man eine Karte $h : (M,p) \to (\mathbb{R}^m, r)$, so ist jeder Weg durch $p$ lokal von der Form $h^{-1} \circ w$, mit einem Weg $w$ durch $r$ in $\mathbb{R}^n$. Sei nun $[h^{-1} \circ w_1] = [h^{-1} \circ w_2]$. Das heißt nach Definition der tangentialen Äquivalenz $(h \circ h^{-1} \circ w_1)^{\cdot}(0) = (h \circ h^{-1} \circ w_2)^{\cdot}(0)$, also $\dot{w}_1(0) = \dot{w}_2(0)$. Dann ist für eine Karte $k$ um $f(p)$

$$(k \circ f \circ h^{-1} \circ w_1)^{\cdot}(0) = D(k \circ f \circ h^{-1})(r) \cdot \dot{w}_1(0) = D(k \circ f \circ h^{-1})(r) \cdot \dot{w}_2(0) = (k \circ f \circ h^{-1} \circ w_2)^{\cdot}(0),$$

also ist nach Definition der tangentialen Äquivalenz $[f \circ h^{-1} \circ w_1] = [f \circ h^{-1} \circ w_2]$. $\square$

Nun, eine Karte $h : (M,p) \to (\mathbb{R}^m, r)$ definiert eine Bijektion

$$T_p h : T_p M \underset{\cong}{\longrightarrow} T_r \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m, \tag{4.2}$$

denn allgemein für einen Vektorraum $V$ ist $T_q V = V$ durch die folgende kanonische Bijektion: Dem Vektor $v \in V$ entspricht der Weg $w : t \mapsto q + tv$ und damit der Tangentialvektor $[w]$, dem Tangentialvektor $[w]$ der Vektor $d/dt|_0 w(t)$.

Wir erklären die lineare Struktur auf $T_p M$ so, daß (4.2) ein Isomorphismus von Vektorräumen wird. Das ist unabhängig von der Karte $h$ nach (4.1), weil $Dg$ linear ist.

Durch Einführen einer Karte wird also $T_p M$ mit $\mathbb{R}^m$ identifiziert. Die Tangentialabbildung wird dann eine lineare Abbildung und ist, wie wir gleich sehen werden, durch die Jacobische beschrieben: Wir gehen aus von dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} & (M,P) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & (N,q) \arrow[d, "k"] & \\ \text{Karte} & (\mathbb{R}^m, r) \arrow[r, "k \circ f \circ h^{-1}"'] & (\mathbb{R}^n, s) & \text{Karte} \end{tikzcd}$$

Die Karten induzieren Isomorphismen nach (4.2)

$$\begin{tikzcd} T_p M \arrow[r, "T_p f"] \arrow[d, "\cong"'] & T_q N \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, dashed, "D(k \circ f \circ h^{-1})(r)"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Die Abbildung $\dashrightarrow$ nämlich bildet $v$ auf

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 k \circ f \circ h^{-1}(r + tv) = D(k \circ f \circ h^{-1})(r) \cdot v$$

ab. Die Abbildung $k \circ f \circ h^{-1}$ ist einfach die Beschreibung von $f$ in den Karten $h$ und $k$, und man sieht: Wenn man $f$ in Karten angibt, wird $T_p f$ durch die Jacobische von $f$ gegeben. Insbesondere ist $T_p f$ linear. Übrigens hat $\mathbb{R}$ den Tangentialraum $T_q \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Die 1 ist eine Basis, und wenn $w : (\mathbb{R}, 0) \to (M, p)$ den Vektor $v \in T_p M$ repräsentiert, so ist $v = T_0 w(1)$, denn

$$v = [t \mapsto w(t)] = T_0 w([t \mapsto t]) = T_0 w(1).$$

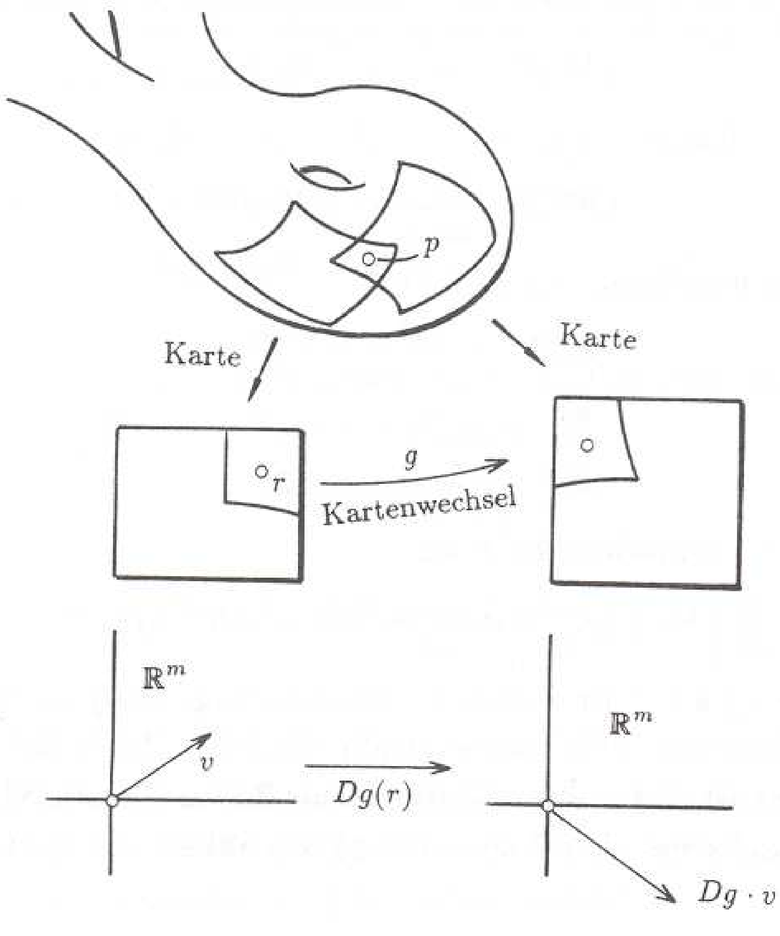
Der Tangentialraum einer $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist ein $n$-dimensionaler Vektorraum. Ein Diffeomorphismus bildet Tangentialräume isomorph ab, muß also die Dimension erhalten.

Soweit die geometrische Beschreibung. Physiker machen die Beschreibung durch Koordinaten (4.2) mit dem Transformationsverhalten (4.1) zur Definition, und erklären auch die Tangentialabbildung durch das Diagramm (4.3).

Ein Physiker sagt etwa folgendes: "Ein kontravarianter Vektor oder Tensor erster Stufe ist ein reelles $n$-Tupel, das sich durch die Jacobimatrix transformiert". Dies erklären wir nun so:

**Definiton.** Sei $M$ eine $m$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein $Ph$-Tangentialvektor in $p \in M$ ist eine Zuordnung, die jeder Karte $h : U \to \mathbb{R}^m$, $h(p) = r$, einen Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ so zuordnet, daß der Karte $g \circ h$ der Vektor $Dg(r) \cdot v$ zugeordnet ist, wenn $g$ ein Kartenwechsel ist.

Wie üblich müssen wir im Matrizenkalkül die Vektoren als Spaltentupel schreiben, wenn wir das Differential als Jacobimatrix schreiben.



Der $Ph$-Tangentialvektor ist natürlich festgelegt, wenn wir seine Komponenten $(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ bezüglich einer Karte kennen. Auch bildet die Menge aller Tangentialvektoren in $p \in M$ einen $m$-dimensionalen reellen Vektorraum $T_pM_{Ph}$, den $Ph$-Tangentialraum. Die algebraischen Operationen erklären wir für eine Karte wie im $\mathbb{R}^m$, und dies ist dann unabhängig von der Karte, weil der Übergang von einer zur anderen Karte durch die **lineare** Abbildung $Dg(r)$ geschieht. Man hat einen offenbaren Isomorphismus vom geometrischen Tangentialraum zum Tangentialraum nach Beschreibung der Physiker, der für eine Karte $h$ durch

$$T_pM \to T_pM_{Ph}, \quad v \mapsto T_ph(v) \in T_{h(p)}\,\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \tag{4.4}$$

gegeben ist. Daß dies wohldefiniert ist, zeigt (4.1). Das Differential beschreibt der Physiker in Koordinaten durch (4.3).

Nun zum Algebraischen: Jedem Tangentialvektor $v$ ordnen wir eine Richtungsableitung von lokal um $p$ definierten Funktionen $\varphi : (M,p) \to \mathbb{R}$ an der Stelle $p$ zu, oder wie man auch sagt, eine Derivation an der Stelle $p$.

**Definition.** *Sei $\varphi : (M,p) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und $v \in T_pM$, dann operiert $v$ als* **Derivation an der Stelle** *$p$ auf $\varphi$ durch*

$$v(\varphi) := T_p\varphi(v) \in T_{\varphi(p)}\,\mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Ist $w$ ein Weg, der $v$ repräsentiert, so ist $w$ eine Abbildung $(\mathbb{R}, 0) \to (M,p)$ und $v = T_0w(1)$, also

$$v(\varphi) = T_p\varphi \circ T_0w(1) = T_0(\varphi \circ w)(1) = D(\varphi \circ w)(0) \cdot 1 = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi w(t),$$

was die Ableitung von $\varphi$ in Richtung der Richtung von $w$ ja auch sein sollte.

In lokalen Koordinaten können wir die Derivationen wie früher beschreiben: Ist $\varphi$ lokal um $p$ auf $\mathbb{R}^n$ definiert, und $v = (v_1, \dots, v_n) \in T_p\,\mathbb{R}^n$, so ist

$$v(\varphi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(p + tv) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(p). \tag{4.5}$$

Insbesondere entsprechen den kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{R}^n = T_p\,\mathbb{R}^n$ die Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$. Algebraiker beschreiben Tangentialvektoren als Derivationen.

Um das genauer zu fassen, führen wir zunächst auf der Menge $F(p)$ der lokal um $p$ auf $M$ definierten Funktionen die Äquivalenzrelation der lokalen Gleichheit ein: Es sei $\varphi \sim_p \psi$, wenn es eine Umgebung $V$ von $p$ mit $\varphi|V = \psi|V$ gibt. Eine Äquivalenzklasse dieser Relation heißt ein **Keim** einer Funktion um $p$. So definiert jede lokal um $p$ definierte Funktion ihren Keim $\varphi : (M,p) \to \mathbb{R}$. Man kann nach demselben Muster auch Keime von

Abbildungen oder von Mengen bei $p$ bilden. So hätten wir oben schon von Keimen von Wegen $(\mathbb{R},0) \to (M,p)$ und Keimen von Abbildungen $(M,p) \to (N,q)$ reden können.

Sei $\mathcal{E}_p$ die Menge der Keime von $C^\infty$-Funktionen auf $M$ um $p$ mit der Struktur einer $\mathbb{R}$-Algebra, die sich von der Addition und Multiplikation von repräsentierenden Funktionen auf Keime überträgt. Dann operieren die Tangentialvektoren $v \in T_pM$ als Derivationen auf $\mathcal{E}_p$.

**(4.6) Eigenschaften der Derivationen.** *Für $\varphi, \psi \in \mathcal{E}_p$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:*

*(i)* **Linearität.** $v(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda v(\varphi) + \mu v(\psi)$.

*(ii)* **Produktregel.** $v(\varphi \cdot \psi) = \varphi(p) \cdot v(\psi) + \psi(p) \cdot v(\varphi)$. □

Algebraiker erheben diese Kennzeichnung zur Definition und erklären: Ein Tangentialvektor $v \in T_pM$ ist eine Abbildung $v : \mathcal{E}_p \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (4.6). Eine solche Abbildung heißt eine **Derivation der Algebra** $\mathcal{E}_p$.

Jedenfalls wird durch (4.5) nach Einführen lokaler Koordinaten eine injektive lineare Abbildung von $T_pM$ in den Vektorraum der Derivationen von $\mathcal{E}_p$ definiert; die Komponenten $v_i$ von $v$ sind die Werte $v(x_i)$, also durch die zugeordnete Derivation bestimmt. Man muß zeigen, daß man so alle Derivationen erhält.

Nun, aus den Eigenschaften (4.6) ergibt sich für jede Derivation $v$ von $\mathcal{E}_p$ zunächst

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$$

nach der Produktregel, also $v(1) = 0$, also $v(\lambda) = 0$ für konstante Funktionen $\lambda$, wegen Linearität. Nun können wir einen beliebigen Keim $\varphi \in \mathcal{E}_p$ in lokalen Koordinaten als

$$\varphi(p+x) = \varphi(p) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \cdot x_i$$

schreiben (Bd. 2, I, 5.2), das ist im wesentlichen der Mittelwertsatz. Ist nun $v(x_i) =: v_i$, so ist

$$v(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(p) \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \partial\varphi/\partial x_i(p),$$

denn $v(\varphi(p)) = 0$ und $x_i(p) = 0$. Das sagt, daß die Derivation $v$ gleich der Derivation ist, die nach (4.5) durch den Vektor mit den Komponenten $(v_1, \ldots, v_n)$ definiert ist, wir haben also gezeigt:

**(4.7) Satz.** *Durch (4.5) wird ein Isomorphismus von $T_pM$ mit dem Vektorraum der Derivationen der Algebra $\mathcal{E}_p$ definiert.* □

Der Isomorphismus zwischen dem Tangentialraum der Geometer und dem der Algebraiker wird durch

$$[\,w\,] \mapsto [\,\varphi \mapsto d/dt \,\big|_{t=0}\, \varphi \circ w(t)\,]$$

vermittelt. In der Bezeichnung der Algebraiker wollen wir auch den Tangentialvektor, der durch den Weg $t \mapsto q + te_i$ repräsentiert ist, mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in T_q \mathbb{R}^n$$

bezeichnen. Dem Basisvektor $1 \in \mathbb{R}$ entspricht demnach der kanonische Basisvektor $\partial/\partial t \in T_p \mathbb{R}$. Auf eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $M^n$ überträgt man diese Basis lokal mit einer Karte

$$h : U \to U' \subset \mathbb{R}^n, \quad h(p) = q.$$

Sie induziert den Isomorphismus

$$T_pM \xrightarrow{\cong} T_q(\mathbb{R}^n), \quad \partial/\partial h_i \mapsto \partial/\partial x_i.$$

Dies definiert die Basisvektoren $\partial/\partial h_i \in T_pM$. Um $\partial/\partial h_i(f) = \partial f/\partial h_i$ für eine lokal um $p$ definierte Funktion $f$ zu berechnen, hat man $f$ in Koordinaten $h$ zu schreiben (genau gesagt ergibt das $f \circ h^{-1}$) und dann nach der $i$-ten Koordinate abzuleiten. Nennt man die Karte gleich $x$ statt $h$, so unterscheidet man hier nicht zwischen Koordinaten auf der Mannigfaltigkeit und Koordinaten auf $\mathbb{R}^n$, was auch vernünftig ist. So werden wir es künftig halten, wenn wir direkt angeben wollen, wie man etwas in lokalen Koordinaten wirklich hinschreiben und ausrechnen soll. Die $x_i$ sind dann lokal um $p$ definierte Koordinatenfunktionen auf $M$, und die $\partial/\partial x_i$ sind Vektoren in $T_pM$. Das Definitionsgebiet der Karte braucht man gar nicht zu erwähnen, Physiker pflegen das sowieso nicht zu tun.

Häufig betrachten wir nicht den Tangentialraum in einem Punkt, sondern die Familie aller Tangentialräume, das **Tangentialbündel**

$$TM := (T_pM \mid p \in M)$$

von $M$ und entsprechend für eine differenzierbare Abbildung $f : M \to N$ die Familie von Differentialen, die **Tangentialabbildung**

$$Tf : TM \to TN,$$

womit einfach die Familie von Abbildungen

$$(T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N \mid p \in M)$$

gemeint sei.

Die Tangentialabbildung ist in lokalen Koordinaten nichts anderes als das Differential, die lokale Linearisierung, in koordinateninvarianter Formulierung. Was uns das Studium des Differentials früher gelehrt hat, lehrt jetzt die Tangentialabbildung.

Sei $f : M^m \to N^n$ stetig differenzierbar. Der **Rang** von $f$ in $p \in M$ ist die Zahl

$$\mathrm{rg}_p f := \mathrm{rg}\, T_pf,$$

also der Rang des Differentials von $f$ an der Stelle $p$. Die Abbildung $f$ heißt **immersiv**, wenn $\mathrm{rg}_p f = m = \dim M$ für alle $p \in M$ ist, also wenn $T_p f$ für jedes $p \in M$ injektiv ist. Und $f$ heißt **submersiv**, wenn $\mathrm{rg}_p f = n = \dim N$ für alle $p \in M$, also wenn $T_p f$ stets surjektiv ist. Ein Punkt $p \in M$ heißt **regulär**, wenn $\mathrm{rg}_p f = \dim N$, und sonst **kritisch**, oder **singulär**. Die Bildpunkte der kritischen Punkte heißen **kritische Werte**, und ihr Komplement in $M$ bilden die **regulären Werte**.

Demnach ist also ein Punkt $q \in N$ ein kritischer Wert, falls in seinem Urbild mindestens ein $p \in M$ liegt, mit $f(p) = q$ und $\mathrm{rg}_p f < \dim N$. Es dürfen daneben auch noch reguläre Punkte im Urbild liegen. Im Urbild eines regulären Wertes hingegen liegen nur reguläre Punkte, aber das Urbild darf leer sein, ein regulärer Wert braucht kein Wert zu sein.

Nach Einführen von Karten $h$ um $p$ und $k$ um $q = f(p)$ ist $T_p f$ durch die Jacobische von $f$ in lokalen Koordinaten, genauer also durch die Jacobimatrix von $k \circ f \circ h^{-1}$ gegeben, und der Rang ist der Rang dieser Jacobischen. Für das lokale Studium von Abbildungen, Teilmengen und so weiter kann man überhaupt immer Karten einführen, und von vornherein annehmen, daß man es mit offenen Mengen im euklidischen Raum zu tun hat. Eine lokale Frage ist zum Beispiel, ob eine Teilmenge $L \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit ist, aber auch der Rang von $f$ wird durch eine Karte nicht geändert, weil eine Karte $h$ einen Isomorphismus $T_p h$ induziert.

Unser Studium des Satzes über die Umkehrfunktion im zweiten Band liefert daher unmittelbar folgendes:

Gegeben sei eine lokal um $p$ definierte $C^\infty$-Abbildung $f$, die wir in Karten betrachten:

$$\text{Karten}\qquad \begin{array}{ccc} (M,p) & \xrightarrow[f]{} & (N,q) \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle k} \\ (\mathbb{R}^m, r) & \xrightarrow[\tilde f]{} & (\mathbb{R}^n, s) \end{array}$$

Die lokal um $h(p)$ erklärte Abbildung $\tilde f = k \circ f \circ h^{-1}$ nennen wir allgemein $f$ **in** den **lokalen Koordinaten** oder Karten $h$ beziehungsweise $k$ und bezeichnen sie gern auch (etwas ungenau) mit $f : (\mathbb{R}^m, h(p)) \to (\mathbb{R}^n, k(q))$. Dann gilt

**(4.8) Rangsatz.** *Ist $f : (M,p) \to (N,q)$ eine $C^\infty$-Abbildung von lokal um $p$ konstantem Rang $r$, so ist $f$ lokal in geeigneten Koordinaten durch*

$$(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0), \quad (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

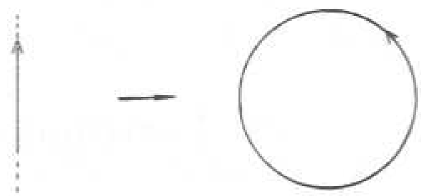
*gegeben (Bd. 2, V, 2.1).* □

Also eine Immersion ist lokal in geeigneten Koordinaten durch

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

gegeben, und ist insbesondere lokal injektiv, nicht aber im Großen.

**Beispiel.** $f : \mathbb{R} \to S^1\,,\; t \mapsto e^{2\pi i t}\,.$



Eine Submersion ist in geeigneten lokalen Koordinaten durch

$$(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

gegeben, und ist lokal surjektiv.

In diesen beiden Fällen ist der Rang schon maximal, und wenn die Abbildung in einem Punkt immersiv oder submersiv ist, muß sie lokal konstanten Rang haben, weil der Rang lokal nicht fallen kann, und überhaupt nicht steigen.

**(4.9) Folgerung.** *Ist $q$ ein regulärer Wert der $C^\infty$-Abbildung $f : M \to N$, so ist $f^{-1}\{q\} \subset M$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Kodimension $n = \dim N$.*

**Beweis:** Lokal in geeigneten Koordinaten um einen Punkt $p \in f^{-1}\{q\}$ hat $f$ nach dem Rangsatz die Gestalt

$$(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n),$$

wobei $q$ die Koordinaten $0 \in \mathbb{R}^n$ hat. Und $f^{-1}\{0\}$ in den Koordinaten ist lokal durch $\{x \,|\, x_1 = \cdots = x_n = 0\}$ gegeben, was gerade die Untermannigfaltigkeit der Kodimension $n$ definiert. □

Alles läuft nach Einführen von Karten auf Betrachtungen im Euklidischen hinaus, also auf etwas, was wir schon gemacht haben. Ist übrigens $n = m$ und $T_p f$ isomorph, so sagt der Satz, daß $f : (M, p) \to (N, q)$ lokal umkehrbar ist, das sagt ja eben der Satz über die Umkehrfunktion.

Was man für Vektorräume erklären kann, kann man insbesondere für Tangentialräume erklären, zum Beispiel ein "$k$-fach kontravarianter und $\ell$-fach kovarianter Tensor" ist ein Element aus

$$T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM \otimes (T_pM)^* \otimes \cdots \otimes (T_pM)^*$$

mit $k$ Faktoren $T_pM$ und $\ell$ Faktoren $(T_pM)^* =: T_p^*M$. Physiker beschreiben auch diese Objekte in Koordinaten, und geben ihr Transformationsverhalten bei Kartenwechsel an. Wir begnügen uns mit der Beschreibung von Tensoren, welche die Bedeutung orientierter infinitesimaler Volumina haben.

## § 5. Partitionen der Eins

Lokal sieht eine differenzierbare Mannigfaltigkeit aus, wie der euklidische Raum. Um mit der Mannigfaltigkeit im großen zurechtzukommen, kann man versuchen, sie in kleine Stücke, zum Beispiel in Simplexe zu zerlegen. Das ist ein für tiefere geometrische Untersuchungen der Mannigfaltigkeiten unumgängliches aber hartes Verfahren, das wir hier gänzlich umgehen können. Wir erklären ein technisches Hilfsmittel, das den Übergang vom Lokalen zum Globalen in vielen Fällen sehr bequem, elegant und vor allem vertrauenerweckend gemacht hat: Die Partitionen der Eins.

Sei $X$ ein topologischer Raum und $\mathfrak{U} = (U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ eine offene Überdeckung von $X$. Eine der Überdeckung $\mathfrak{U}$ **untergeordnete Partitionen der Eins** ist eine Familie $(\varphi_\nu \mid \nu \in N)$ von Funktionen

$$\varphi_\nu : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$$

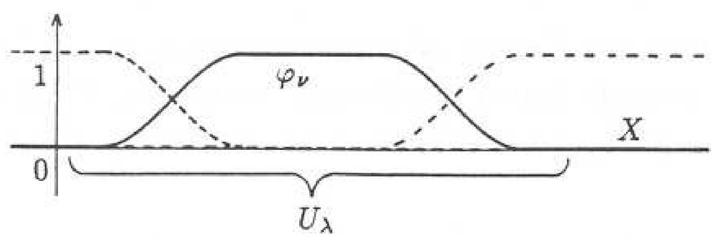
mit folgenden Eigenschaften:

*(i) Jeder Punkt von $X$ besitzt eine Umgebung $V$, so daß $\varphi_\nu \mid V = 0$ für alle bis auf endlich viele $\nu$.*

*(ii)* $\sum_{\nu \in N} \varphi_\nu = 1$.

*(iii) Jeder Träger* $\mathrm{Tr}(\varphi_\nu)$ *liegt in einer der offenen Mengen $U_\lambda$.*

Der **Träger** einer Funktion $f$ auf $X$ ist der Abschluß der Menge $\{x \mid f(x) \neq 0\}$.




Die Summe in (ii) ist sinnvoll, weil nach (i) lokal fast alle Summanden verschwinden. Die Summe ist, wie man sagt, **lokal endlich**. Insbesondere ist sie in jedem Punkt endlich. Sie zerlegt die konstante Funktion mit Wert 1 in die Funktionen $\varphi_\nu$, und damit zum Beispiel jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ in die Funktionen $\varphi_\nu \cdot f$, deren Träger jeweils in einer der Mengen $U_\lambda$ liegen. Man zerlegt also nicht die Mannigfaltigkeit, man zerlegt die Funktionen auf ihr. Ist $K \subset X$ kompakt, so sind die Funktionen $\varphi_\nu | K$ fast alle Null; das gilt lokal nach Voraussetzung, und dann global wegen der Überdeckungseigenschaft.

Sind die $\varphi_\nu$ alle stetig, so heißt die Partition **stetig**, sind sie alle differenzierbar, so heißt die Partition **differenzierbar** und im $C^\infty$-Falle **glatt**, ist $N$ abzählbar, so heißt sie **abzählbar**.

Wir wollen zeigen, daß es auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit zu jeder offenen Überdeckung eine untergeordnete abzählbare glatte Partition der Eins gibt.

Sei also $M$ eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine **kompakte Ausschöpfung** von $M$ ist eine Folge kompakter Teilmengen $A_i$, so daß

$$A_i \subset \overset{\circ}{A}_{i+1}, \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = M.$$

**(5.1) Satz.** *Jede Mannigfaltigkeit besitzt eine kompakte Ausschöpfung.*

**Beweis:** Unter einer **Kugel** in $M$ verstehen wir eine Teilmenge $K$, die in einem geeigneten Kartengebiet liegt und durch die Karte auf eine (abgeschlossene) Kugel in $\mathbb{R}^n$ abgebildet wird. In diesem Sinne sei $(K_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Kugeln in $M$, sodaß die offenen Kugeln $(\overset{\circ}{K}_n \mid n \in \mathbb{N})$ noch eine Überdeckung von $M$ bilden. So eine Folge gibt es, weil die Mannigfaltigkeit eine abzählbare Basis der Topologie hat, das wird hier entscheidend benutzt. Jetzt setzen wir

$$A_1 = K_1.$$

Ist dann induktiv $A_i$ konstruiert und $K_i \subset A_i$, so wird $A_i$ von endlich vielen offenen Kugeln $\overset{\circ}{K}_1 \cup \cdots \cup \overset{\circ}{K}_\ell$ überdeckt, und wir setzen

$$A_{i+1} = K_1 \cup \cdots \cup K_\ell \cup K_{i+1}.$$

Offenbar gilt $\bigcup_i A_i \supset \bigcup_i K_i = M$, und die $A_i$ bilden eine kompakte Ausschöpfung von $M$. $\square$

Eine solche Ausschöpfung sei jetzt fest gewählt, und es sei eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ von $M$ gegeben. Sei $K(r)$ die offene Kugel mit Radius $r$ um $0 \in \mathbb{R}^n$. Wir konstruieren eine Folge von Karten

$$\begin{array}{ccc} h_\nu : V_\nu & \xrightarrow{\cong} & K(3), \\ \cup & & \cup \\ W_\nu & \xrightarrow{\cong} & K(1), \end{array}$$

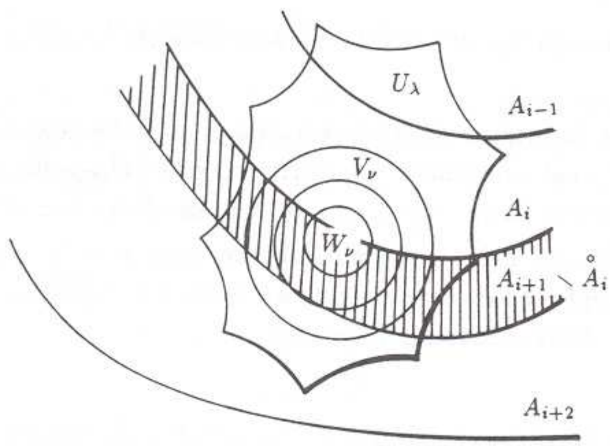
so daß die Familie von Teilmengen $(V_\nu \mid \nu \in \mathbb{N})$ lokal endlich und jedes $V_\nu$ in einer Menge $U_\lambda \in \mathfrak{U}$ enthalten ist, und so daß $\{(h_\nu, W_\nu) \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ ein Atlas von $M$ ist, also die $W_\nu$ noch $M$ überdecken. Diesen Atlas bezeichnen wir als **guten Atlas** für die Überdeckung $\mathfrak{U}$ von $M$.

**(5.2) Satz.** *Zu jeder offenen Überdeckung einer Mannigfaltigkeit gibt es einen guten Atlas.*

**Beweis:** Die Konstruktion benutzt die obige kompakte Ausschöpfung: Für jedes $i$ wählen wir endlich viele Karten $h_\nu : V_\nu \to K(3)$ so daß

$$V_\nu \subset \mathring{A}_{i+2} \setminus A_{i-1}, \quad V_\nu \subset U_\lambda \quad \text{für ein } \lambda,$$

und so daß die zugehörigen $W_\nu = h_\nu^{-1} K(1)$ eine Überdeckung von $A_{i+1} \setminus \mathring{A}_i$ bilden.



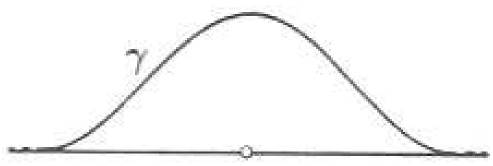

Weil letztere Menge kompakt, und $\mathring{A}_{i+2} \setminus A_{i-1}$ eine offene Obermenge ist, ist das leicht möglich. Alle diese Karten für alle $i \in \mathbb{N}$ bilden den gesuchten Atlas. Jeder Punkt liegt in einer offenen Menge $\mathring{A}_i$ und jedes $A_i$ trifft nur endlich viele $V_\nu$. □

**(5.3) Satz.** *Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit gibt es zu jeder offenen Überdekkung eine untergeordnete beliebig oft stetig differenzierbare Partition der Eins.*

**Beweis:** Zur Überdeckung $\mathfrak{U}$ konstruieren wir einen $C^\infty$-differenzierbaren guten Atlas $\{(h_\nu, W_\nu) \mid \nu \in \mathbb{N}\}$. Auch wählen wir eine $C^\infty$-Funktion

$$\gamma : K(3) \to [0, \infty), \qquad \mathrm{Tr}\,(\gamma) \subset K(2), \qquad \gamma(x) > 0 \quad \text{für } x \in K(1)$$

und erhalten dadurch die Funktion




$$\varphi_\nu : M \to [0, \infty), \quad \varphi_\nu = \gamma \circ h_\nu, \quad \varphi_\nu \mid M \setminus V_\nu = 0.$$

Dann ist $\varphi_\nu$ auf ganz $M$ beliebig oft stetig differenzierbar, und $\varphi_\nu$ hat kompakten Träger in $V_\nu$, und $\varphi_\nu > 0$ auf $W_\nu$. Weil die $V_\nu$ eine lokal endliche Familie bilden, ist die Summe

$$\varphi = \sum_\nu \varphi_\nu$$

lokal endlich, und $\varphi(x) > 0$, weil $x \in W_\nu = h_\nu^{-1}K(1)$ für ein $\nu$, und dann $\varphi_\nu(x) = \gamma \circ h_\nu(x) > 0$. Daher setze $\psi_\nu = \varphi_\nu / \varphi$, dann ist $(\psi_\nu \mid \nu \in \mathbb{N})$ die gesuchte Partition der Eins. □

Die benutzte Funktion $\gamma$ kann man etwa durch

$$\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(4 - |x|^2)^{-2}) & \text{für } |x|^2 < 4, \\ 0 & \text{für } |x|^2 \geq 4, \end{cases}$$

explizit angeben (Bd. 1, IV, § 4). Für die Definition des Integrals genügt es, **integrable** Partitionen der Eins zu haben und zu benutzen. Wir nennen eine Partition der Eins $(\varphi_\nu \mid \nu \in \mathbb{N})$ **integrabel**, wenn die $\varphi_\nu$ fast überall stetig sind und kompakten Träger im Gebiet einer Karte haben. Natürlich muß man erklären, was "fast überall" hier heißt:

Eine Teilmenge $A \subset M$ ist **dünn** (hat das **Maß Null, fast alle** $x$ sind nicht in $A$), wenn für jede Karte $(h, U)$ die Menge $h(U \cap A)$ dünn im euklidischen Raum ist. Eine Aussage gilt **fast überall** in $M$, wenn sie für fast alle $x \in M$ gilt. Beachte, daß dünne Mengen bei stetig differenzierbarem Kartenwechsel auf dünne Mengen abgebildet werden (Bd. 2, IV, 3.2).