
Kapitel V

Integration auf Mannigfaltigkeiten

*Nicht heller Sonnenaufgang vermag
Dir zu verkünden hellen Tag,
Doch wenn sie geht in Wolken auf
Und mählich dann sich klärt im Lauf,
Wird sie am Mittag ganz
Entfalten vollen Glanz.*

Rückert

Wir entwickeln den Kalkül der alternierenden Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten. Es beginnt mit einem kurzen Abriß der zugehörigen Linearen Algebra. Diese wird dann über die Tangentialbündel auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Wir erklären das Integral von Differentialformen, wir führen berandete Mannigfaltigkeiten mit ihrer Randorientierung durch die äußere Normale ein, und wir erklären die äußere Ableitung alternierender Differentialformen.

§ 1. Algebra alternierender Formen

Die Transformationsformel

$$\int_U f \circ \varphi \cdot |\det D\varphi| = \int_{\varphi U} f$$

zeigt, daß einer Koordinatentransformation $\varphi : U \rightarrow V$ mit $\det D\varphi > 0$ die Transformation

$$f \mapsto (f \circ \varphi) \cdot \det D\varphi$$

des Integranden zugeordnet ist, und — wenn wir es in der Denkweise der Physiker sagen — nur einer Größe, die ein solches Transformationsverhalten hat, können wir auf koordinateninvariante Weise ein Integral zuordnen. Wir betrachten aber nicht nur n -dimensionale Volumina, sondern auch solche kleinerer Dimension, und beginnen damit, die zugehörige Lineare Algebra zu erklären.

Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Später wird $V = T_p M$ sein. Sei

$$V^k = V \times V \times \cdots \times V = \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_j \in V\}$$

das k -fache Produkt von V mit sich selbst. Eine k -**Form** oder **Multilinearform** vom **Grad** k auf V ist eine **multilineare** Abbildung

$$\alpha : V^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1, \dots, v_k) \mapsto \alpha(v_1, \dots, v_k).$$

Daß α multilinear ist heißt: α ist linear in jeder Komponente bei festen übrigen.

Beispiel. Ein Skalarprodukt ist eine 2-Form $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$.

Die Menge aller k -Formen auf V bildet einen reellen Vektorraum, Teilraum des Raumes aller Funktionen $V^k \rightarrow \mathbb{R}$. Es ist auch leicht, eine Basis dieses Vektorraumes zu finden. Ist (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V , so ist eine k -Form festgelegt, wenn man ihren Wert auf allen k -Tupeln von Basisvektoren kennt, und diese Werte kann man willkürlich festsetzen. Der Raum $\mathcal{Q}^k V$ aller k -Formen auf V ist also isomorph zum Raum der Dimension $\binom{n}{k}$ aller Funktionen auf der Menge der k -Tupel der n Basisvektoren. Wir setzen noch $\mathcal{Q}^0 V := \mathbb{R}$, und erinnern daran, daß $\mathcal{Q}^1 V = V^*$ der Dualraum von V ist. Man hat ein Produkt von Formen

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^k V \times \mathcal{Q}^\ell V &\rightarrow \mathcal{Q}^{k+\ell} V, & (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \cdot \beta, \\ \alpha \cdot \beta(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell) &= \alpha(v_1, \dots, v_k) \cdot \beta(w_1, \dots, w_\ell). \end{aligned}$$

Es bezeichne $S(k)$ die k -te **symmetrische Gruppe**, also die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, \dots, k\}$. Auf dieser Menge operiert $S(k)$ nach unserer Notation von links, also $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$ ist die Zusammensetzung der Abbildungen σ und τ .

Eine k -Form α auf V heißt **alternierend**, wenn für alle $\sigma \in S(k)$ gilt

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \text{sig}(\sigma) \cdot \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

wobei $\text{sig}(\sigma)$ das **Signum** der Permutation σ ist, also

$$\text{sig}(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{i - j}{\sigma(i) - \sigma(j)}.$$

Natürlich hätte es genügt zu fordern, daß α den Faktor -1 aufnimmt, wenn man zwei nebeneinanderstehende Komponenten v_j vertauscht. Es genügt auch zu fordern, daß α stets verschwindet, wenn zwei Komponenten gleich sind: Eine alternierende Form erfüllt das, denn man darf — bis aufs Vorzeichen — annehmen, daß die gleichen Komponenten nebeneinander stehen. Beim Vertauschen nimmt die Form den Faktor -1 auf, ist aber ungeändert, also Null. Umgekehrt schließt man, indem man die linke Seite der Gleichung

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, v_i + v_{i+1}, v_i + v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k) = 0$$

multilinear ausrechnet. Die Menge aller alternierenden k -Formen, die man auch **äußere** k -Formen nennt, ist ein Unterraum $\text{Alt}^k V \subset \mathcal{Q}^k V$, und offenbar ist $\text{Alt}^0 V = \mathbb{R}$ und $\text{Alt}^1 V = V^*$. Ist $V = \mathbb{R}^n$, so ist

$$\det : V^n \rightarrow \mathbb{R}$$

eine alternierende n -Form.

Aus obiger Betrachtung folgt die

(1.1) Bemerkung. Ist $\alpha \in \text{Alt}^k V$, so ist $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$ falls die (v_1, \dots, v_k) linear abhängig sind, und daher

$$\text{Alt}^k V = 0 \quad \text{für } k > \dim V.$$

Beweis: Ist etwa $v_1 = \sum_{i>1} \lambda_i v_i$, so $\alpha(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i>1} \lambda_i \alpha(v_i, v_2, \dots, v_i, \dots, v_k) = 0$. \square

Wir definieren eine Linksoperation der Gruppe $S(k)$ auf dem Raum der k -Formen $\mathcal{Q}^k V$ durch

$$\sigma\alpha(v_1, \dots, v_k) := \text{sig}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}), \quad \sigma \in S(k), \quad \alpha \in \mathcal{Q}^k V.$$

Eine k -Form α ist genau dann alternierend, wenn

$$\sigma\alpha = \alpha \quad \text{für alle } \sigma \in S(k).$$

Also bei unserer Festsetzung der Operation von $S(k)$ auf $\mathcal{Q}^k V$ besteht $\text{Alt}^k V \subset \mathcal{Q}^k V$ gerade aus den unter der Operation von $S(k)$ invarianten Elementen. Wir definieren die **Projektion**

$$\mathbf{a} : \mathcal{Q}^k V \rightarrow \text{Alt}^k V, \quad \mathbf{a}|_{\text{Alt}^k V} = \text{id},$$

durch

$$(1.2) \quad \mathbf{a}\alpha := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S(k)} \sigma\alpha,$$

und wir nennen $\mathbf{a}\alpha$ den **Alternator** der k -Form α . Also $\mathbf{a}\alpha$ ist der Mittelwert der Transformaten $\sigma\alpha$, $\sigma \in S(k)$, und es ist daher ziemlich klar, daß \mathbf{a} eine Projektion ist: Ist $\alpha \in \text{Alt}^k V$, so ist $\sigma\alpha = \alpha$ für alle σ , also $\mathbf{a}\alpha = \alpha$, und ist α beliebig, so ist für $\tau \in S(k)$

$$\tau(\mathbf{a}\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \tau\sigma\alpha = \mathbf{a}\alpha,$$

denn mit σ durchläuft auch $\tau\sigma$ die Gruppe $S(k)$. Also $\mathbf{a}\alpha$ bleibt fest bei allen $\tau \in S(k)$, ist also alternierend.

Jetzt definieren wir das **äußere Produkt (Dachprodukt)**

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \wedge : \text{Alt}^k V \times \text{Alt}^\ell V &\rightarrow \text{Alt}^{k+\ell} V, & (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \wedge \beta, \\ \alpha \wedge \beta &:= (k, \ell) \cdot \mathbf{a}(\alpha \cdot \beta), & (k, \ell) &:= \frac{(k+\ell)!}{k! \cdot \ell!}. \end{aligned}$$

Über den Vorfaktor (k, ℓ) herrscht in der Literatur nicht allgemeine Einigkeit, wenngleich das Richtige auf dem Vormarsch ist. Es kommt auch vor, daß im Zuge der Anpassung und Verbesserung Unstimmigkeiten innerhalb eines Lehrbuches entstehen. Man kann die Definition so verstehen: Die Form $\alpha \cdot \beta$ ist ja nicht alternierend, aber sie bleibt schon fest unter der Operation der Untergruppe

$$S(k) \times S(\ell) \subset S(k + \ell),$$

deren Faktoren $S(k)$ und $S(\ell)$ die Permutationsgruppen der ersten k und der letzten ℓ Indexe sind. Die Formel (1.3) läuft nun darauf hinaus, daß man die Summe

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\sigma} \sigma(\alpha \cdot \beta)$$

bildet, wo σ ein Repräsentantensystem von Rechtsnebenklassen $\sigma \cdot (S(k) \times S(\ell))$ dieser Untergruppe in $S(k + \ell)$ durchläuft.

(1.4) Eigenschaften des äußeren Produkts. *Das äußere Produkt ist*

- (i) **bilinear**, also linear in jedem Faktor bei festem anderen;
- (ii) **graduiert antikommutativ**, das heißt ist $\alpha \in \text{Alt}^k V$, $\beta \in \text{Alt}^\ell V$, so ist

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot \ell} \beta \wedge \alpha;$$

- (iii) *assoziativ*, nämlich für $\alpha \in \text{Alt}^k V$, $\beta \in \text{Alt}^\ell V$, $\gamma \in \text{Alt}^r V$ ist

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \frac{(k + \ell + r)!}{k! \ell! r!} \mathbf{a}(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)$$

- (iv) *das Produkt ist natürlich.*

Letztere Bedingung bedeutet folgendes: Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ von Vektorräumen induziert die lineare Abbildung

$$f^k : V^k \rightarrow W^k, \quad (v_1, \dots, v_k) \mapsto (f(v_1), \dots, f(v_k))$$

und damit die lineare Abbildung

$$Q^k f : Q^k W \rightarrow Q^k V, \quad \alpha \mapsto \alpha \circ f^k,$$

und diese Abbildung induziert durch Beschränkung eine Abbildung

$$(1.5) \quad f^* = \text{Alt}^k f : \text{Alt}^k W \rightarrow \text{Alt}^k V.$$

Ist nämlich $\sigma\alpha = \alpha$ für alle $\sigma \in S(k)$, so insbesondere $\sigma(\alpha \circ f^k) = \alpha \circ f^k$. Alle diese induzierten Abbildungen sind **funktoriell**, also

$$\text{id}^* = \text{id}, \quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*,$$

nämlich $(f \circ g)^*\alpha = \alpha \circ (f \circ g)^k = \alpha \circ f^k \circ g^k = g^*(f^*\alpha)$. Daß nun das äußere Produkt für diese induzierten Abbildungen natürlich ist, heißt:

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta.$$

Beweis von (1.4):

(i) ist klar, $\alpha \cdot \beta$ ist bilinear, und \mathbf{a} ist linear.

(ii) Sei $\tau \in S(k+l)$ die Vertauschung der ersten k mit den letzten ℓ Indexe, dann ist $\alpha \cdot \beta = \text{sig}(\tau) \cdot \tau(\beta \cdot \alpha) = (-)^{k \cdot \ell} \tau(\beta \cdot \alpha)$, also

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (k, \ell) \mathbf{a}(\alpha \cdot \beta) = \frac{(k, \ell)}{(k+l)!} \sum_{\sigma} \sigma(\alpha \cdot \beta) = (-)^{k \cdot \ell} \frac{(k, \ell)}{(k+l)!} \sum_{\sigma} \sigma \tau(\beta \cdot \alpha) \\ &= (-)^{k \cdot \ell} \frac{(k, \ell)}{(k+l)!} \sum_{\sigma} \sigma(\beta \cdot \alpha) = (-)^{k \cdot \ell} \beta \wedge \alpha. \end{aligned}$$

(iv) ist klar wie gesagt, und für (iii) berechnen wir $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$. Es ist

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &= \frac{(k+l)!}{k! \ell!} \mathbf{a}(\alpha \cdot \beta) \wedge \gamma = \frac{(k+l+r)!}{k! \ell! r!} \mathbf{a}(\mathbf{a}(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma), \\ \mathbf{a}(\mathbf{a}(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) &= \frac{1}{(k+l+r)!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S(k+l+r)} \sum_{\tau \in S(k+l)} \sigma(\tau(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma). \end{aligned}$$

Wir fassen $S(k+l)$ als die Untergruppe von $S(k+l+r)$ auf, die nur die ersten $k+l$ Indexe bewegt, dann steht da:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{a}(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\tau \in S(k+l)} \frac{1}{(k+l+r)!} \sum_{\sigma \in S(k+l+r)} \sigma \tau(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{S(k+l)} \mathbf{a}(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) = \mathbf{a}(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma). \end{aligned}$$

Das ist das Behauptete und die Rechnung für $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ führt aus Symmetriegründen zum selben Ziel. □

Das Ergebnis der letzten Rechnung kann man auch so sehen: Es ist

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \sum_{\sigma} \sigma(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma),$$

wo σ ein Repräsentantensystem von Rechtsnebenklassen von $S(k) \times S(\ell) \times S(r)$ in der Gruppe $S(k+l+r)$ durchläuft.

Das Assoziativgesetz berechtigt uns, einfach $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_\ell$ zu schreiben, und man erhält sofort durch Induktion:

$$(1.6) \quad \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_\ell = \frac{(k_1 + \cdots + k_\ell)!}{k_1! \cdots k_\ell!} \mathbf{a}(\alpha_1 \cdots \alpha_\ell),$$

wenn α_j den Grad k_j hat.

(1.7) Folgerung. Ist $\alpha_i \in \text{Alt}^1 V$ für $i = 1, \dots, \ell$, so ist

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_\ell(v_1, \dots, v_\ell) = \det(\alpha_i(v_j)).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_\ell(v_1, \dots, v_\ell) &= \ell! \cdot \mathbf{a}(\alpha_1 \cdots \alpha_\ell)(v_1, \dots, v_\ell) \\ &= \sum_{\sigma \in S(\ell)} \text{sig}(\sigma) \cdot \alpha_1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha_\ell(v_{\sigma(\ell)}) = \det(\alpha_i(v_j)). \end{aligned}$$

□

Man nennt die direkte Summe

$$\text{Alt } V = \bigoplus_{k=0}^n \text{Alt}^k V, \quad n = \dim V,$$

die **äußere Algebra** von V . Die Multiplikation in dieser Algebra ist durch das Dachprodukt induziert. Wir haben also einen Funktor Alt von der Kategorie der reellen Vektorräume in die Kategorie der reellen Algebren definiert, der einem Homomorphismus $f : V \rightarrow W$ von Vektorräumen den induzierten Homomorphismus

$$f^* = \text{Alt}(f) : \text{Alt}(W) \rightarrow \text{Alt}(V)$$

von Algebren zuordnet.

Wir wollen $\text{Alt } V$ und $\text{Alt}^k V$ in Basen explizit beschreiben. Sei also jetzt (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V und $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ die duale Basis von V^* , also

$$\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Eine Form $\alpha \in \text{Alt}^k V$ ist dann offenbar bestimmt durch die Werte auf allen k -Tupeln $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, $0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, von Basisvektoren.

(1.8) Satz. Die Elemente $\varepsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_k}$, $0 < i_1 < \cdots < i_k \leq n$, bilden eine Basis von $\text{Alt}^k V$, also $\dim \text{Alt}^k V = \binom{n}{k}$, $\dim \text{Alt } V = 2^n$.

Beweis: Sei $0 < i_1 < \cdots < i_k \leq n$ und $0 < j_1 < \cdots < j_k \leq n$, dann ist

$$(\varepsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \det(\varepsilon_{i_\nu}(e_{j_\mu}))$$

gleich 0 falls $(i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k)$ und 1 sonst, woraus folgt, daß die angegebenen Elemente linear unabhängig sind, und daß der von ihnen erzeugte Raum auf den $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ alle Werte annimmt. \square

Insbesondere ist $\dim \text{Alt}^n V = 1$ und $\text{Alt}^n V$ wird von der Form

$$\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n = \det : V^n \rightarrow \mathbb{R}$$

erzeugt; die Determinante ist hier als die alternierende n -Form definiert, die auf der gewählten Basis den Wert 1 annimmt. Die Basiselemente $\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_k}$ von $\text{Alt}^k V$ entsprechen gerade den stets nach der Größe geordneten Teilmengen $S = \{i_1, \dots, i_k\}$ von genau k Elementen, $|S| = k$, und wir bezeichnen diese Elemente kurz mit ε_S und setzen entsprechend $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = e_S$, so daß

$$\varepsilon_S(e_T) = \delta_{S,T} = \begin{cases} 1 & \text{falls } S = T, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit V_S das Erzeugnis der Basisvektoren e_S in V , so haben wir die Inklusion und Projektion

$$V_S \xrightarrow{i_S} V \xrightarrow{p_S} V_S, \quad p_S \circ i_S = \text{id},$$

und wenden wir hierauf Alt^k mit $|S| = k$ an, so erhalten wir

$$\text{Alt}^k V_S \xleftarrow{i_S^*} \text{Alt}^k V \xleftarrow{p_S^*} \text{Alt}^k V_S, \quad i_S^* \circ p_S^* = \text{id}.$$

Also p_S^* ist eine Inklusion mit zugehöriger Projektion i_S^* . Das Erzeugende ε_S von $\text{Alt}^k V_S$ wird dabei auf $\varepsilon_S \in \text{Alt}^k V$ abgebildet, und der Satz sagt demnach:

$$(1.9) \quad \text{Alt}^k V = \bigoplus_{|S|=k} \text{Alt}^k V_S, \quad \alpha \mapsto (\alpha(e_S) \cdot \varepsilon_S),$$

und $\text{Alt}^k V_S$ ist von ε_S erzeugt. Also der Koeffizient von α für die Basis der ε_S ist $\alpha(e_S)$, weil $\varepsilon_S(e_T) = \delta_{S,T}$.

Auch die induzierten Abbildungen $f^* = \text{Alt} f$ können wir in Koordinaten angeben. Ist zunächst f eine lineare Abbildung, gegeben durch eine Matrix

$$f = (a_{ij}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

so ist

$$f^*(\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n)(e_1, \dots, e_n) = \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n(fe_1, \dots, fe_n) = \det(f) = \det(a_{ij}),$$

also

$$f^* = \det f : \text{Alt}^n \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Alt}^n \mathbb{R}^n.$$

Im allgemeinen ist eine lineare Abbildung nach Einführen von Basen durch eine $(m \times n)$ -Matrix gegeben:

$$f = (a_{ij}) : V = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m = W,$$

und die induzierte Abbildung

$$f^* : \text{Alt}^k W = \bigoplus_{|S|=k} \text{Alt}^k W_S \rightarrow \bigoplus_{|T|=k} \text{Alt}^k V_T = \text{Alt}^k V$$

ist dann durch eine $\left(\binom{n}{k} \times \binom{m}{k}\right)$ -Matrix (f_{TS}^*) beschrieben, mit den Koeffizienten

$$f_{TS}^* = \det(f_{ST}), \quad f_{ST} : V_T \xrightarrow{i_T} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{p_S} W_S.$$

Das heißt für die gegebene Matrix von f :

$$(1.10) \quad f_{TS}^* = \det(a_{ij})_{i \in S, j \in T}.$$

Um dasselbe noch einmal in Komponenten direkt auszurechnen, $f^* \varepsilon_S$ hat bei ε_T den Koeffizienten

$$f_{TS}^* = f^* \varepsilon_S(e_T) = \varepsilon_S(f^k e_T) = \det(\varepsilon_i(f e_j))_{i \in S, j \in T} = \det(a_{ij})_{i \in S, j \in T}.$$

Eine kleine Anwendung: Wir betrachten eine Zusammensetzung linearer Abbildungen

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^{n+m} \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n, \quad A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}).$$

Sie induziert

$$\det(BA) : \text{Alt}^n \mathbb{R}^n \xrightarrow{B^*} \text{Alt}^n \mathbb{R}^{n+m} = \bigoplus_{|S|=n} \text{Alt}^n \mathbb{R}_S^{n+m} \xrightarrow{A^*} \text{Alt}^n \mathbb{R}^n,$$

und

$$B^* = ((B i_S)^*)_{|S|=n}, \quad A^* = ((p_S A)^*)_{|S|=k}.$$

Dabei soll man A^* als Zeile und B^* als Spalte lesen. Es ergibt sich also

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \det(BA) &= \sum_{|S|=n} \det(p_S A) \cdot \det(B i_S) \\ &= \sum_{|S|=n} \det(a_{ij})_{i \in S} \cdot \det(b_{ij})_{j \in S}. \end{aligned}$$

Die Determinanten in der Summe gehören zu $(n \times n)$ -Untermatrizen, mit erstem beziehungsweise zweitem Index in der gleichen Menge S .

Die Formen $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$, $\alpha_j \in \text{Alt}^1 V$ heißen übrigens **zerlegbar**. Nicht jede Form in $\text{Alt}^k V$ ist zerlegbar, aber die zerlegbaren Formen erzeugen $\text{Alt}^k V$.

Eine n -Form auf einem n -dimensionalen Raum ordnet jedem n -Tupel von Vektoren ein orientiertes Volumen zu. Transformiert man den Raum, so wird die n -Form mit der Determinante der Transformation transformiert, das ist eben die geometrische Bedeutung der Determinante einer linearen Abbildung.

Kommen wir zur Analysis zurück, so werden wir nicht einfach Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit integrieren können, wohl aber Abbildungen, die jedem Punkt $p \in M$ ein infinitesimales Volumen, ein Element aus $\text{Alt}^n T_p M$ zuordnen. Natürlich hat $\text{Alt}^n T_p M$ die Dimension 1, aber es ist nicht auf irgendeine kanonische Weise isomorph zu \mathbb{R} . Zwar

induziert eine Karte einen Isomorphismus mit \mathbb{R} , aber ein Kartenwechsel φ induziert die Transformation mit $\det D\varphi$. Das ist nun gerade was wir brauchen, um koordinatenunabhängig zu integrieren — nur nicht ganz. Wir müßten haben, daß die Determinante positiv ist, und hier ist eine weitere kleine Erinnerung notwendig, bevor wir uns wieder der Analysis zuwenden.

Bisher war alles reine Algebra, und statt \mathbb{R} hätten wir auch z.B. den Körper \mathbb{C} wählen können. Jetzt aber kommt es auf die Anordnung von \mathbb{R} an. Sei also V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Eine Form $0 \neq \alpha \in \text{Alt}^n V$ definiert eine **Orientierung** von V . Eine Basis (v_1, \dots, v_n) heißt (bezüglich α) **positiv orientiert**, wenn $\alpha(v_1, \dots, v_n) > 0$, und sonst **negativ orientiert**.

Die Menge aller Basen zerfällt in zwei Orientierungsklassen; zwei Basen sind genau dann in der gleichen Klasse (**gleich orientiert**), wenn die Basistransformation zwischen ihnen positive Determinante hat. Dies ist offenbar unabhängig von α , und α bestimmt nur, welche Klasse positiv heißen soll.

Es gibt demnach zwei Orientierungen von V , definiert durch α und $-\alpha$, und $\lambda\alpha$ definiert dieselbe Orientierung wie α , genau wenn $\lambda > 0$. Äquivalent kann man sagen: Eine Orientierung ist eine Auswahl einer der genannten Klassen von Basen. Ist dann (e_1, \dots, e_n) in der positiv orientierten Klasse, so ist $\lambda \cdot \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n$, $\lambda > 0$ eine die Orientierung definierende n -Form.

Dies liefert auch die richtige Definition für den 0-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Hier ist $\text{Alt}^0 \mathbb{R}^0 := \mathbb{R}$, und man hat zwei Orientierungen, bezeichnet durch die repräsentierenden Formen 1 und -1 .

Das äußere Produkt $\text{Alt}^0 V \times \text{Alt}^k V \rightarrow \text{Alt}^k V$ ist das gewöhnliche Produkt $(a, \alpha) \mapsto a \cdot \alpha$.

Physiker erklären die Orientierung gern mit Hilfe von Handschuhen und Schrauben. Das betrifft jedoch nicht die mathematische Orientierung des \mathbb{R}^3 , sondern dient dazu, eine Orientierung im Raum der Erfahrung und des Experiments auszuzeichnen, was etwas ganz anderes ist.

Sind V und W von gleicher Dimension, orientiert durch α beziehungsweise β , so heißt ein linearer Isomorphismus $f : V \rightarrow W$ **orientierungserhaltend**, wenn $f^*\beta = \lambda \cdot \alpha$ mit $\lambda > 0$, und **orientierungsumkehrend**, falls $\lambda < 0$. Um wieder auf die Analysis zu deuten: Könnten wir uns auf Kartenwechsel φ beschränken, so daß $D\varphi$ orientierungserhaltend ist, so hieße das $\det D\varphi = |\det D\varphi|$, und dann sind wir auf dem rechten Weg.

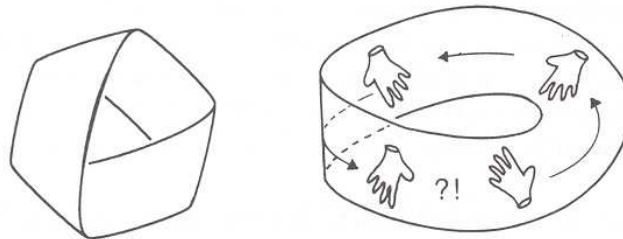
§ 2. Integration alternierender Differentialformen

Der letzte Abschnitt hat uns darauf aufmerksam gemacht, daß wir uns mit der Orientierung befassen müssen.

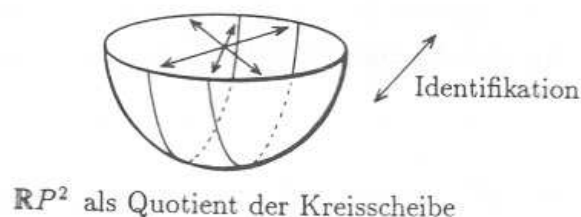
Sei M eine Mannigfaltigkeit. Ein differenzierbarer Atlas auf M heißt **orientiert**, wenn alle seine Kartenwechsel orientierungserhaltend sind, also für alle Kartenwechsel φ ist an jeder Stelle $\det D\varphi > 0$. Eine **orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit** ist eine Mannigfaltigkeit mit einem (unter den orientierten) maximalen orientierten differenzierbaren Atlas.

Das geht nun alles gerade wie mit den differenzierbaren Strukturen, nur fragt man sich, ob die Orientierung ernstlich zusätzliche Voraussetzungen verlangt, oder ob man für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit immer einen orientierten differenzierbaren Atlas — eine Orientierung — finden kann. Ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit orientierbar?

Die Antwort ist: Nein. Ein Beispiel ist das **Möbiusband**



Es fehlt in keinem Buch über unseren Gegenstand, und man könnte es für ein sehr künstliches Gebilde halten, das nur dazu gut ist, als Gegenbeispiel zu figurieren, aber auch die projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ ist nicht orientierbar, weil sie nämlich ein Möbiusband als offene Teilmenge enthält.



Wir werden vorerst nur orientierte Mannigfaltigkeiten betrachten, und werden bald sehen, daß die Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n , die als Nullstellenmengen eines regulären Gleichungssystems entstehen, stets eine Orientierung besitzen.

Nun zur linearen Algebra des vorigen Abschnitts. Der Dualraum des Tangentialraums heißt der **Kotangentialraum**

$$T_p^* M := (T_p M)^* = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R}).$$

Hier muß man wirklich zwischen dem Vektorraum $T_p M$ und seinem Dualraum $T_p^* M$ unterscheiden. Sie sind zwar isomorph, aber es gibt keinen ausgezeichneten Isomorphismus, überhaupt keinen, den man frei von Auswahlen ein für allemal für alle Mannigfaltigkeiten und Punkte angeben könnte.

Eine lokal um $p \in M$ definierte differenzierbare Funktion $\varphi : (M, p) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert eine Linearform, das **Differential** von φ in p

$$(2.1) \quad d_p \varphi \in T_p^* M, \quad d_p \varphi \cdot v := T_p \varphi(v) \in T_{\varphi(p)} \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Eine lokal um $q \in N$ definierte differenzierbare Abbildung, oder wie wir auch zu sagen gelernt haben, ein differenzierbarer Keim $f : (N, q) \rightarrow (M, p)$ induziert

$$T_q f : T_q N \rightarrow T_p M, \quad \text{also } T_q^* f : T_p^* M \rightarrow T_q^* N,$$

und dabei wird unser Differential so transformiert:

$$(2.2) \quad T_q^* f(d\varphi) = d(\varphi \circ f),$$

denn $T^* f(d\varphi) \cdot v = d\varphi \cdot T f(v) = T\varphi \circ T f(v) = T(\varphi f)(v) = d(\varphi f) \cdot v$.

Ist $U' \subset \mathbb{R}^n$, so hat $T_r U' = T_r \mathbb{R}^n$ die Basis $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, die Koordinatenfunktionen x_i haben Differentiale dx_i , und die Gleichung

$$dx_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} := \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

zeigt: Die Differentiale dx_i , $i = 1, \dots, n$ bilden die zu $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ duale Basis von $T_r^* \mathbb{R}^n = T_r^* U'$. Wo in unserer Darstellung der Linearen Algebra im vorigen Abschnitt die Basen (e_1, \dots, e_n) und dual $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ auftraten, da stehen also hier $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ und (dx_1, \dots, dx_n) . Ist $\varphi : (\mathbb{R}^n, r) \rightarrow \mathbb{R}$ ein differenzierbarer Funktionskeim, so ist

$$(2.3) \quad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n,$$

weil nach Definition $d\varphi(\partial/\partial x_i) = \partial\varphi/\partial x_i$.

Nun zu den alternierenden Formen. Wir setzen

$$(2.4) \quad \text{Alt}_p^k M := \text{Alt}^k T_p M$$

und nennen die Familie von Vektorräumen

$$\text{Alt}^k M = (\text{Alt}_p^k M \mid p \in M)$$

das **Bündel der alternierenden Formen** auf M . Eine differenzierbare Abbildung $f : (M, p) \rightarrow (N, q)$ induziert die Abbildung

$$f_p^* := (T_p f)^* : \text{Alt}_q^k N \rightarrow \text{Alt}_p^k M,$$

und für eine differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ erhalten wir so eine Familie

$$f_p^* : \text{Alt}_{f(p)}^k N \rightarrow \text{Alt}_p^k M, \quad p \in M,$$

von linearen Abbildungen.

Führen wir eine Karte, also lokale Koordinaten

$$x : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$$

in einem Gebiet $U \subset M^m$ ein, so bilden die Differentiale

$$dx_i, \quad i = 1, \dots, m$$

an jeder Stelle $p \in U$ eine Basis des Kotangentialraumes. Daher schreibt sich eine alternierende k -Form $\omega_p \in \text{Alt}_p^k M$ für $p \in U$ eindeutig in der Form

$$\omega_p = \sum_{|S|=k} a_S dx_S = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Eine differenzierbare Transformation $y = g(x)$ induziert $dy_i = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} dx_j =: \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j$, und dies hat man für dy_{i_ν} einzusetzen, um

$$\alpha = \sum a_{i_1 \dots i_k} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

zu transformieren. Das Ergebnis ist nach (1.10)

$$g^* \alpha = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial(y_{i_1}, \dots, y_{i_k})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

Oder in anderer Schreibweise: Ist $\alpha = \sum_{|S|=k} a_S dy_S$ und $y = g(x)$, so ist

$$(2.6) \quad g^* \alpha = \sum_{|S|=|T|=k} a_S \frac{\partial y_S}{\partial x_T} dx_T, \quad \frac{\partial y_S}{\partial x_T} := \det(\partial y_i / \partial x_j)_{i \in S, j \in T}.$$

Definition. Eine Differentialform vom Grad k auf M ist ein Schnitt des Bündels $\text{Alt}^k M$, also eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in M$ eine alternierende Form $\alpha_p \in \text{Alt}_p^k M$ zuordnet.

Lokal im Gebiet einer Karte $x : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ schreibt sich eine Differentialform demnach eindeutig in der Form

$$(2.7) \quad \alpha_p = \sum_{|S|=k} a_S(p) dx_S.$$

Die Differentialform heißt (fast überall) stetig, differenzierbar, C^k, \dots wenn die Funktionen $a_S : U \rightarrow \mathbb{R}$ in (2.7) die entsprechende Eigenschaft haben. Dies ist unabhängig von der Wahl der Karte, denn bei Kartenwechsel werden diese Funktionen nach (2.6) C^∞ -differenzierbar transformiert. Die sämtlichen Differentialformen vom Grad k auf M bilden einen reellen Vektorraum

$$\Omega^k M,$$

und es ist $\Omega^0 M$ der Raum von Funktionen auf M , denn $\text{Alt}^0 = \mathbb{R}$, und $\Omega^k M = 0$ falls $k > \dim M$. In dieser Bezeichnung sind die Stetigkeits- oder Differenzierbarkeitseigenschaften nicht genannt.

Eine differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ induziert die Abbildung

$$(2.8) \quad f^* := \Omega^k f : \Omega^k N \rightarrow \Omega^k M, \quad (f^* \alpha)_p = f_p^* \alpha_{f(p)}.$$

Dadurch wird Ω^k ein Funktor von der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der reellen Vektorräume. In Koordinaten ist die induzierte Abbildung gegeben durch

$$f^* : \sum_{|S|=k} a_S(y) dy_S \mapsto \sum_{|S|=|T|=k} a_S(f(x)) \frac{\partial f_S}{\partial x_T}(x) dx_T.$$

Das Dachprodukt induziert ein für diese induzierten Abbildungen natürliches Produkt

$$(2.9) \quad \wedge : \Omega^k M \times \Omega^\ell M \rightarrow \Omega^{k+\ell} M, \quad (\alpha \wedge \beta)_p = \alpha_p \wedge \beta_p.$$

Für $k = 0$ ist dies die gewöhnliche Multiplikation von ℓ -Formen mit Funktionen, und $\Omega^\ell M$ wird dadurch zu einem Modul über dem Ring $\Omega^0 M$, also jedenfalls über dem Ring $C^\infty(M)$ aller C^∞ -Funktionen auf der Mannigfaltigkeit. Die Sequenz

$$\Omega^* = (\Omega^k \mid k \in \mathbb{N}_0)$$

definiert damit einen Funktor von der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der graduierten Algebren, eigentlich einen Funktor von Algebren garben über dem Funktor Ω^0 von Ringgarben — aber wir wollen uns nicht im Allgemeinen verlieren.

Beispiel. Ist $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, so ist $d\varphi \in \Omega^1 M$. Das Differential definiert also eine Differentialform vom Grad 1. Differentialformen vom Grad 1 heißen auch **Pfaffsche Formen**. Lokal, also etwa im \mathbb{R}^m , schreiben sie sich in der Form

$$\sum_{i=1}^m a_i(x) dx_i,$$

und

$$d_x \varphi = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

Wie wir wissen, ist nicht jede Pfaffsche Form ein Differential. Sind die a_i stetig differenzierbar, so ist $\partial a_i / \partial x_j = \partial a_j / \partial x_i$ eine notwendige (und lokal auch hinreichende) Bedingung. Darauf werden wir noch kommen (V, § 3).

Sei nun M eine orientierte m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir wollen m -Formen $\omega \in \Omega^m M$ integrieren, also Funktionen, die jedem Punkt ein infinitesimales Volumen zuordnen. Betrachte zunächst den Spezialfall, daß $M = U \subset \mathbb{R}^m$ offen ist. Sei

$\Omega_c(U)$ der Raum der integrierbaren Differentialformen auf U vom Grad m mit kompaktem Träger. Das sind also die Differentialformen

$$f \cdot dx, \quad dx := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

deren definierende Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist und außerhalb einer kompakten Teilmenge von U verschwindet. Wir definieren die lineare Abbildung

$$\int : \Omega_c^m U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega = f \cdot dx = f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \mapsto \int \omega := \int_U f(x) dx_1 \dots dx_m$$

mit folgenden

(2.10) Eigenschaften des lokalen Integrals.

(i) Ist $(\psi_i \mid i \in \mathbb{N})$ eine integrierbare Partition der Eins auf U , so ist

$$\int \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int \psi_i \cdot \omega.$$

(ii) Ist auch $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $g : V \rightarrow U$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, also $\det Dg > 0$, so ist

$$\int_U \omega = \int_V g^* \omega.$$

Beweis: (i) folgt leicht, weil die Summe endlich ist, und (ii) ist die Transformationsformel, denn rechts steht

$$\int_V g^* \omega := \int_V f \circ g \cdot g^*(dx) = \int_V f \circ g \cdot \det(Dg) dx. \quad \square$$

Im allgemeinen heiße jetzt eine Differentialform $\omega \in \Omega^m M$ auf der orientierten Mannigfaltigkeit M **positiv**, wenn fur jede Karte $x : U \rightarrow U'$ des zugehörigen Atlanten

$$\omega_p = f(p)dx, \quad f \geq 0.$$

Diese Bedingung ist nicht abhängig vom Koordinatensystem, weil die Jacobideterminanten der Kartenwechsel hier stets positiv sind. Auch hat man die kanonische Zerlegung als Differenz positiver Formen

$$\omega = \omega_+ - \omega_-,$$

nämlich, wenn lokal $\omega = f dx$ ist, so ist $\omega_+ = f_+ dx$, $\omega_- = f_- dx$. Entsprechend setzen wir

$$\int_M \omega = \int_M \omega_+ - \int_M \omega_-$$

falls die rechte Seite existiert, und fur eine positive Form $\omega \in \Omega^m M$ erklären wir das Integral $\int_M \omega$ auf die folgende naheliegende Weise:

Wir wählen eine integrable Partition der Eins $(\varphi_i \mid i \in \mathbb{N})$, das heißt, die φ_i haben kompakten Träger im Gebiet einer Karte $h_i : U_i \rightarrow U'_i \subset \mathbb{R}^m$ und seien etwa fast überall stetig. Dann setzen wir

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int_M \varphi_i \cdot \omega,$$

falls die rechte Seite existiert, und

$$\int_M \varphi_i \cdot \omega := \int_{U_i} \varphi_i \cdot \omega = \int_{U'_i} (h_i^{-1})^* \varphi_i \cdot \omega.$$

Dies hängt bei fester Partition der Eins nicht von den Karten h_i ab, denn ist g ein Kartenwechsel, so ist $[(gh)^{-1}]^* = (h^{-1}g^{-1})^* = (g^{-1})^*(h^{-1})^*$ und man benutzt die Transformationsinvarianz (2.10, ii).

Wählt man eine andere Partition (ψ_j) mit Karten (k_j, V_j) , so ist nach (2.10, i)

$$\begin{aligned} \int_M \omega &:= \sum_i \int_{U_i} \varphi_i \omega = \sum_i \int_{U'_i} (h_i^{-1})^* \varphi_i \omega \\ &= \sum_{i,j} \int_{U'_i} (h_i^{-1})^* \varphi_i \psi_j \omega = \sum_{i,j} \int_{V'_j} (k_j^{-1})^* \varphi_i \psi_j \omega = \sum_j \int_{V'_j} (k_j^{-1})^* \psi_j \omega, \end{aligned}$$

was die Unabhängigkeit von allen Auswahlen zeigt. □

Natürlich kann man das Integral auch unter schwächeren Voraussetzungen an die Differentialform erklären. Für positive Formen genügt, daß in der lokalen Koordinatendarstellung $\omega_p = f(p)dx$ die Koeffizientenfunktionen f Lebesgue-integrabel sind. Aber darauf wollen wir jetzt nicht unsere Aufmerksamkeit richten.

§ 3. Erläuterungen zur Integration und Orientierung

Nacheinander sei das im vorigen Abschnitt Erklärte näher betrachtet. Zunächst zur Rolle der Partitionen der Eins.

Wie integriert man eine Differentialform $\alpha \in \Omega^n M^n$? Wir definieren, wie es naheliegt, den **Träger** einer Differentialform α als

$$\text{Tr } \alpha := \text{Abschluß } \{x \mid \alpha_x \neq 0\}.$$

1. Fall. Sei $M = \mathbb{R}^n$ und $\text{Tr } \alpha$ kompakt. Dann ist $\alpha_x = a(x) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ für eine Funktion $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, und

$$\int \alpha := \int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx_1 \dots dx_n,$$

falls die rechte Seite existiert.

2. Fall. Sei $\text{Tr } \alpha$ kompakt und im Gebiet einer orientierten, zum orientierten Atlanten gehörigen Karte $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ enthalten. Dann ist

$$\int_M \alpha := \int_U \alpha := \int_{\mathbb{R}^n} (h^{-1})^* \alpha, \quad \text{Fall 1.}$$

Oder expliziter in Koordinaten: $\alpha_p = a \circ h(p) dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_n$, und

$$\int_U ah(p) dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_n := \int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx_1 \dots dx_n.$$

3. Fall. Sei α eine beliebig vorgegebene positive Form. Wir zerlegen M als disjunkte Vereinigung einer Folge von Teilmengen $(A_i \mid i \in \mathbb{N})$, so daß \bar{A}_i kompakt ist und im Gebiet einer orientierungserhaltenden Karte $h_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ liegt. Die Familie $(A_i \mid i \in \mathbb{N})$ sei lokal endlich. Dann sei χ_i die charakteristische Funktion von A_i , und

$$\int_{A_i} \alpha := \int_M \chi_i \cdot \alpha, \quad (\text{Fall 2}), \quad \text{und} \quad \int_M \alpha := \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \alpha,$$

falls die rechte Seite existiert.

In der Tat ist in diesem Fall $(\chi_i \mid i \in \mathbb{N})$ eine Partition der Eins, wie wir sie für die Definition des Integrals $\int_M \alpha$ brauchen. Eine Zerlegung $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, wie sie hier gefordert ist, ist leicht zu schaffen. Man wählt eine lokal endliche Überdeckung von M mit kompakten Kugeln

$$K_i = h_i^{-1} \{x \mid |x| \leq r_i\}$$

und setzt

$$\begin{aligned} A_1 &= K_1, \\ A_{i+1} &= K_{i+1} \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_i). \end{aligned}$$

Ist M kompakt, so kann man aus jeder Überdeckung mit Kugeln $\overset{\circ}{K}_i$ eine endliche auswählen.

Soviel zum "Zerstückeln" der Form in Teile, die sich über Karten integrieren lassen. Als nächstes zur Orientierung.

(3.1) Satz. *Genau dann besitzt die differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n einen orientierten Atlas (ist M **orientierbar**), wenn es auf M^n eine nirgends verschwindende (stetige oder) beliebig oft stetig differenzierbare Differentialform vom Grad n gibt. Eine solche Form heißt eine **Volumenform** auf M .*

Beweis: Besitze M eine Volumenform $\omega \in \Omega^n M$. Ist dann $y : U \rightarrow U'$ eine Karte von M und U' eine offene Kugel, so ist $\omega_y = a(y) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$, und weil $a(y)$ stets

ungleich Null ist, können wir allenfalls y_1 durch $-y_1$ ersetzen und $a > 0$ erreichen. Die so konstruierten Karten bilden einen orientierten Atlas, der durch die Form ω festgelegt ist: Eine Karte y ist orientierungserhaltend, genau wenn

$$\omega = a \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n, \quad \text{mit } a > 0.$$

Ist $y = g(x)$ ein Kartenwechsel solcher Karten, so ist nämlich

$$\omega = a \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n = a \circ g \cdot \det Dg \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

also

$$a \circ g \cdot \det Dg > 0 \quad \text{und daher} \quad \det Dg > 0.$$

Hat man umgekehrt einen orientierten Atlas $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, h_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ auf M , so hat man lokal, nämlich im Gebiet jeder Karte U_λ , die Volumenform $\omega_\lambda := dh_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dh_{\lambda_n}$, und zwei solche Formen unterscheiden sich auf ihrem gemeinsamen Definitionsgebiet $U_\lambda \cap U_\mu$ durch eine positive Funktion $\det(Dh_{\lambda\mu}) \circ h_\lambda$. Wir wählen eine C^∞ -Partition der Eins $(\varphi_i \mid i \in \mathbb{N})$, die der Überdeckung $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ untergeordnet ist, so daß $\text{Tr } \varphi_i \subset U_{\lambda(i)}$, und setzen

$$\omega = \sum_i \varphi_i \cdot \omega_{\lambda(i)}, \quad \text{mit} \quad \varphi_i \cdot \omega_{\lambda(i)} := 0 \quad \text{wo } \varphi_i = 0 \text{ ist.}$$

Dann ist $\omega \neq 0$ überall, denn in jedem $x \in M$ ist $\varphi_i(x) > 0$ für mindestens ein i , und alle lokalen Volumenformen $\omega_{\lambda(i)}$ unterscheiden sich an der Stelle x um positive Faktoren. \square

Eine Volumenform auf M bestimmt eine Orientierung von M , und zwei Volumenformen ω_1 und ω_2 bestimmen genau dann die gleiche Orientierung, wenn

$$\omega_1 = \lambda \omega_2, \quad \text{für eine Funktion } \lambda : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda > 0.$$

Hat man eine Volumenform ω auf M gewählt, so schreibt sich jede andere Differentialform vom Grad n in der Form

$$\alpha = f \cdot \omega, \quad f : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ist auch α eine Volumenform, so ist stets $f \neq 0$, und wenn M zusammenhängt, ist entweder $f > 0$ oder $f < 0$. Im ersten Fall definiert α die gleiche Orientierung wie ω , im zweiten die gleiche wie $-\omega$, also haben wir die

(3.2) Bemerkung. *Eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit besitzt entweder keine oder zwei Orientierungen, definiert durch eine Volumenform ω und $-\omega$. \square*

Die Volumenform ω versieht die Mannigfaltigkeit M mit einer zusätzlichen Struktur: Einem infinitesimalen Volumenmaß. Ist eine solche Struktur $\omega \in \Omega^n M$ einmal gewählt,

so kann man auch Funktionen integrieren, durch

$$\int_M f := \int_M f \cdot \omega.$$

Weil jede Differentialform vom Grad n sich als $\alpha = f \cdot \omega$ schreibt, läuft das Integrieren von Funktionen und von Differentialformen auf dasselbe hinaus, wenn man ω gewählt hat. Mit anderen Worten, eine Volumenform ω auf M definiert ein Maß auf M durch

$$\mu(A) = \int_A \omega,$$

wenn man das Integral für im Lebesgue-Sinne integrierbare alternierende n -Formen erklärt. Hier würde genügen, daß ω auf den Teilmengen A_i der obigen Zerlegung von M stetig ist, und das kann man immer durch $\omega|_{A_i} = dh_i$ erreichen, aber im folgenden wird es gerade auf die Differenzierbarkeit der Differentialformen ankommen, und auf die Orientierung.

Wir betrachten zwei durch Volumenformen α und β orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten M und N und eine differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$, überall vom Rang

$$\operatorname{rg}_p f = \dim M = \dim N.$$

Dann ist

$$f^* \beta = \lambda \cdot \alpha \quad \text{für eine Funktion } \lambda : M \rightarrow \mathbb{R},$$

und f heißt **orientierungserhaltend**, wenn $\lambda > 0$ ist und **orientierungsumkehrend** für $\lambda < 0$.

(3.3) Bemerkung. Ist $f : M \rightarrow N$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, so ist

$$\int_N \beta = \int_M f^* \beta.$$

Ist f ein orientierungsumkehrender Diffeomorphismus, so ist

$$\int_N \beta = - \int_M f^* \beta.$$

Beweis: Ist $\{(U_\lambda, h_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ ein orientierter Atlas auf N , so ist $\{(U_\lambda, h_\lambda \circ f) \mid \lambda \in \Lambda\}$ ein orientierter Atlas auf M , und

$$(h_\lambda^{-1})^* \beta = [(h_\lambda f)^{-1}]^* f^* \beta$$

so daß die erste Behauptung direkt aus der Definition des Integrals folgt. Ist nun f orientierungsumkehrend, so ist f orientierungserhaltend, wenn man die Orientierung von N durch ihre negative ersetzt (die Volumenform durch ihre negative ersetzt). Ist aber

(U, h) orientierungserhaltend für die Orientierung ω , so ist $(U, (-h_1, h_2, \dots, h_n))$ orientierungserhaltend für $-\omega$, und $\int (h^{-1})^* \beta = -\int [(-h_1, h_2, \dots, h_n)^{-1}]^* \beta$, daher die zweite Behauptung. \square

Daß es viele orientierte Mannigfaltigkeiten gibt, zeigt der

(3.4) Satz. Sei $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^∞ -Abbildung, und 0 ein regulärer Wert von f , dann besitzt $M^n := f^{-1}\{0\}$ eine durch f bestimmte Volumenform und damit Orientierung.

Beweis: Der \mathbb{R}^{n+k} besitzt die Volumenform $dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+k}$, die Determinante. Nun hat man die von der Inklusion $M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ induzierte Inklusion $T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k}$, und wir wissen

$$T_p M = \{v \mid \langle \text{grad } f_i(p), v \rangle = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, k\}.$$

Daher kann man auf M eine Volumenform ω definieren durch

$$\omega(v_1, \dots, v_n) := \det(\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_k, v_1, \dots, v_n). \quad \square$$

Beispiele: Der euklidische Raum \mathbb{R}^n ist orientiert durch dx , also die Basis (e_1, \dots, e_n) von $\mathbb{R}^n = T_r \mathbb{R}^n$ ist positiv orientiert. Die Involution

$$\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto -x$$

ist orientierungserhaltend wenn n gerade ist, und sonst umkehrend. Man hat die induzierte **Antipodenabbildung**

$$\tau : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto -x,$$

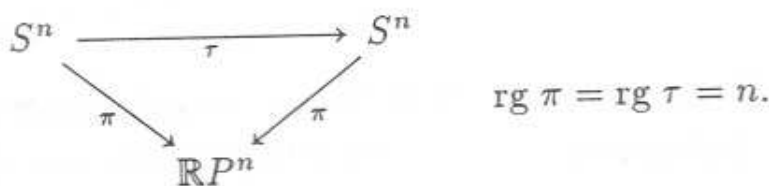
der $(n - 1)$ -dimensionalen Sphäre, und S^{n-1} ist orientiert durch die Form ω^{n-1} , mit

$$\omega_x^{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det(x, v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Offenbar ist

$$(\tau^* \omega^{n-1})_x(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega_{-x}^{n-1}(-v_1, \dots, -v_{n-1}) = (-1)^n \omega_x^{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Also $\tau : S^n \rightarrow S^n$ ist orientierungserhaltend genau wenn n ungerade ist. Nach Definition ist der projektive Raum $\mathbb{R}P^n = S^n / \tau$, und man hat das kommutative Diagramm



(3.5) Satz. *Ist n ungerade, so gibt es genau eine Orientierung von $\mathbb{R}P^n$, so daß die Projektion $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ orientierungserhaltend ist. Ist n gerade, so ist $\mathbb{R}P^n$ nicht orientierbar.*

Beweis: Sei n ungerade, also $\tau^*\omega = \omega$ für die Volumenform ω auf S^n . Dann bestimme eine Volumenform α auf $\mathbb{R}P^n$ so: Ist $\pi(x) = y$, so ist

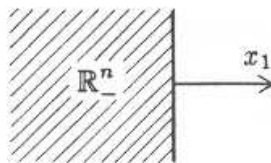
$$\alpha_y(v_1, \dots, v_n) := \omega_x(T_x\pi^{-1}v_1, \dots, T_x\pi^{-1}v_n) = \omega_{\tau x}(T_{\tau x}\pi^{-1}v_1, \dots, T_{\tau x}\pi^{-1}v_n).$$

Dies ist eine (wohldefinierte) Volumenform, also $\mathbb{R}P^n$ ist orientierbar. Ist n gerade, so ist auf S^n jetzt $\tau^*\omega = -\omega$. Angenommen α wäre eine Volumenform auf $\mathbb{R}P^n$, so wäre $\pi^*\alpha = \lambda\omega$ und oBdA $\lambda > 0$. Also $\lambda\omega = \pi^*\alpha = (\pi\tau)^*\alpha = \tau^*\pi^*\alpha = \tau^*\lambda\omega = -(\lambda \circ \tau) \cdot \omega$, also $0 < \lambda \circ \tau = -\lambda < 0$, ein Widerspruch. \square

Mit anderen Worten: Der projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist genau dann orientierbar, wenn die Antipodenabbildung $\tau : S^n \rightarrow S^n$ der zugehörigen Sphäre orientierungserhaltend ist. Man kann sich das auch direkt mit Argumenten über orientierte Atlanten überlegen.

§ 4. Berandete Mannigfaltigkeiten

Der euklidische **Halbraum** $\mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$ hat den **Rand** $\partial\mathbb{R}_-^n = \mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$.

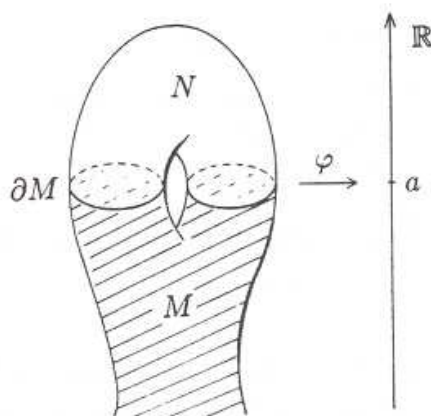


Eine Funktion $f : \mathbb{R}_-^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (k -mal stetig, ...) differenzierbar im Punkte $x \in \mathbb{R}_-^n$, wenn es eine Umgebung U von x in \mathbb{R}^n und eine k -mal stetig differenzierbare Funktion $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß $\tilde{f}|_{(\mathbb{R}_-^n \cap U)} = f|_{(\mathbb{R}_-^n \cap U)}$. Die partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung von \tilde{f} sind dann offenbar durch f bestimmt, so daß $D^\alpha f$ für $|\alpha| \leq k$ auch auf $\partial\mathbb{R}_-^n$ wohldefiniert ist. Eine Funktion $f : \mathbb{R}_-^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (k -mal stetig) differenzierbar, wenn sie dies in jedem Punkt ist, und mit einer Partition der Eins sieht man leicht, daß dies bedeutet: Es gibt eine (k -mal stetig) differenzierbare Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $f = \tilde{f}|_{\mathbb{R}_-^n}$.

Wie der euklidische Raum das lokale Modell für Mannigfaltigkeiten ist — sie sind lokal euklidisch — so ist der Halbraum das lokale Modell für berandete Mannigfaltigkeiten.

Eine topologische n -dimensionale **berandete Mannigfaltigkeit** ist ein Hausdorffraum M mit abzählbarer Basis der Topologie, der eine offene Überdeckung $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ zuläßt, mit **Karten** $h_\lambda : U_\lambda \xrightarrow{\cong} U'_\lambda \subset \mathbb{R}^n$, wobei U'_λ offen im Halbraum ist (in der induzierten Topologie des Halbraums). Eine solche Familie von Karten $\{(h_\lambda, U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ heißt ein **Atlas** von M . Ein Atlas heißt **C^∞ -differenzierbar**, wenn dies von allen seinen Kartenwechseln gilt, und eine **differenzierbare Struktur** auf M ist ein maximaler differenzierbarer Atlas. Eine **differenzierbare berandete Mannigfaltigkeit** ist eine berandete Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur. Hier ist mit “differenzierbar” wie früher “ C^∞ ” gemeint. Das geht alles ebenso wie für Mannigfaltigkeiten.

Beispiele entstehen so: Sei N eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand. Sei $\varphi : N \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -differenzierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von φ , dann ist $M := \varphi^{-1}(-\infty, a] \subset N$ eine berandete Mannigfaltigkeit.



In der offenen Menge $\varphi^{-1}(-\infty, a)$ sind die Karten von N , deren Gebiet in dieser Menge liegt, auch Karten von M , und in einem Punkt auf $\varphi^{-1}\{a\}$ kann man $\varphi - a$ als erste Koordinate einer Karte wählen. So ist die Kugel

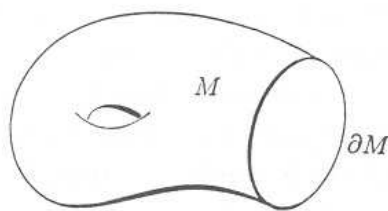
$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$$

eine berandete Mannigfaltigkeit.

Ein Diffeomorphismus $g : U \rightarrow V$ offener Mengen in \mathbb{R}^n bildet Umgebungen von $p \in U$ auf Umgebungen von $g(p)$ ab, also ein Diffeomorphismus offener Mengen des Halbraumes \mathbb{R}^n_- bildet Randpunkte $p \in \partial \mathbb{R}^n_-$ wieder auf Randpunkte ab. Sonst müßte ja der inverse Diffeomorphismus g^{-1} einen inneren Punkt q auf einen Randpunkt $g^{-1}(q) =: p \in \partial \mathbb{R}^n_-$ abbilden, und dann würde noch eine Umgebung des Punktes p in \mathbb{R}^n im Bild von g^{-1} liegen. Diese Überlegung rechtfertigt die Definition:

Sei M eine berandete differenzierbare Mannigfaltigkeit, dann heißt $p \in M$ ein **Randpunkt**, wenn für eine (und damit jede) Karte h um p gilt $h(p) \in \partial \mathbb{R}^n_-$. Die Menge der

Randpunkte von M ist ∂M und $M \setminus \partial M$ heißt das **Innere** von M .



Mit allgemeinen rein topologischen Erklärungen der Wörter “Rand” und “Inneres” kann dies kollidieren, aber es wird nie zweifelhaft sein, wovon die Rede ist.

In unserem Beispiel ist $\partial M = \varphi^{-1}\{a\}$, und allgemein versehen die Karten von M den Rand ∂M mit der Struktur einer $(n - 1)$ -dimensionalen unberandeten Mannigfaltigkeit,

$$\partial\partial M = \emptyset,$$

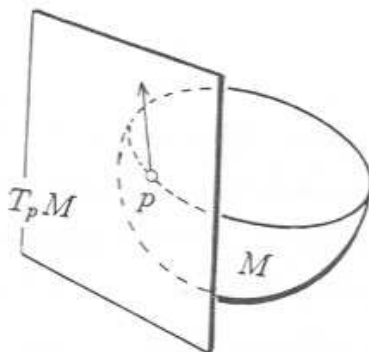
deren Karten durch Einschränkung der Karten von M gegeben sind,

$$h|_{\partial M} : U \cap \partial M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}.$$

Die offene Teilmenge $M \setminus \partial M =: \overset{\circ}{M}$, das Innere von M , ist eine n -dimensionale unberandete Mannigfaltigkeit.

Mannigfaltigkeiten ohne weiteres sollen auch fortan unberandet sein, sonst reden wir von berandeten Mannigfaltigkeiten. Eine **geschlossene** Mannigfaltigkeit ist eine kompakte unberandete Mannigfaltigkeit.

Eine berandete Mannigfaltigkeit hat in jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialraum, den man wie für unberandete Mannigfaltigkeiten definiert, und zwar so, daß $T_p M$ auch in Randpunkten ein voller n -dimensionaler Vektorraum und nicht etwa ein Halbraum ist.



Die Definition des Geometers ist hier nicht so praktisch, aber die Definition des Physikers ist wörtlich anzuwenden: Bezüglich einer Karte ist $T_p M \cong \mathbb{R}^n$. Bei Kartenwechsel wird mit der Jacobischen des Kartenwechsels transformiert.

Wissen wir nun, was Vektoren sind, so kann auch von T_p^*M , von $\text{Alt}^k M$ und $\Omega^k M$ die Rede sein, und wir können Differentialformen vom Grad n integrieren. Auch Partitionen der Eins verschafft man sich wie früher. Es schadet nichts, wenn man überhaupt stets annimmt, daß die berandete Mannigfaltigkeit wie oben durch

$$M = \varphi^{-1}(-\infty, a] \subset N$$

definiert ist. Dann entstehen alle Formen, Partitionen und Integrale einfach durch Einschränkung von N auf die Teilmenge M . Die berandete Mannigfaltigkeit M^n , $n > 1$, sei orientiert, also wir haben einen Atlas, dessen Kartenwechsel positive Jacobi-Determinante haben, und wir haben eine Volumenform $\omega \in \Omega^n M$. Dann besitzt auch der Rand ∂M eine kanonische **Orientierung durch die äußere Normale**.

Sie ist so erklärt: Zunächst ist \mathbb{R}^n und damit \mathbb{R}_-^n orientiert durch die Volumenform

$$dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

und $\mathbb{R}^{n-1} = \partial \mathbb{R}^n$ ist durch $dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ orientiert.

Ist nun $\{(h_\lambda, U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ der gegebene orientierte Atlas von M , so schränkt man ihn auf ∂M ein, und $\{(h_\lambda|U_\lambda \cap \partial M, U_\lambda \cap \partial M) \mid \lambda \in \Lambda\}$ ist der Atlas, der die Orientierung von ∂M definiert. Ist er auch wirklich orientiert?

Die Kartenwechsel entstehen durch Einschränkung der Kartenwechsel $h_{\lambda\mu}$, also durch Einschränkung eines lokalen Diffeomorphismus mit positiver Funktionaldeterminante

$$g : (\mathbb{R}_-^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}_-^n, q)$$

auf den Rand $\partial \mathbb{R}_-^n$. Aber g bildet $\partial \mathbb{R}_-^n$ nach $\partial \mathbb{R}_-^n$ ab, also $g_1(0, x_2, \dots, x_n) = 0$, und daher hat die Jacobische in einem Randpunkt die Form

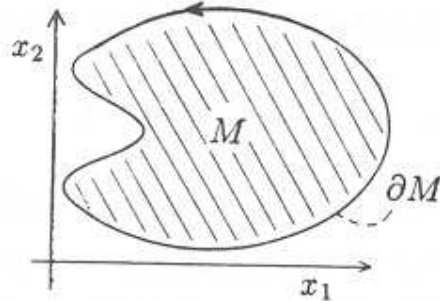
$$Dg = \left[\begin{array}{c|ccc} \partial g_1 / \partial x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline ? & & D(g| \mathbb{R}^{n-1}) & \end{array} \right].$$

Dabei ist $g| \mathbb{R}^{n-1} = (g_2(0, \dots), \dots, g_n(0, \dots))$ ein Kartenwechsel des betrachteten Atlanten von ∂M . Aber

$$\partial g_1 / \partial x_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_1(h, x_2, \dots, x_n)}{h},$$

und wählen wir stets $h < 0$, also den Punkt aus \mathbb{R}_-^n , so liegt auch der Bildpunkt in \mathbb{R}_-^n , also $g_1 < 0$. Folglich ist $\partial g_1 / \partial x_1 > 0$, also $\det D(g| \mathbb{R}^{n-1}) > 0$, weil $\det Dg > 0$. Das war zu zeigen. \square

Auf der Ebene entspricht dies der gewohnten Orientierung der Kurve ∂M “gegen den Uhrzeiger-Sinn”.



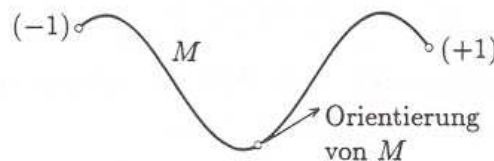
Allgemein ist $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ der “äußere Normalvektor” in $p \in \mathbb{R}^{n-1} = \partial \mathbb{R}^n$, und das $(n-1)$ -Tupel (v_2, \dots, v_n) von Vektoren in $\mathbb{R}^{n-1} = T_p \partial \mathbb{R}^n$ ist positiv orientiert, genau wenn

$$\det(e_1, v_2, \dots, v_n) > 0.$$

In einer eindimensionalen berandeten orientierten Mannigfaltigkeit hat man eine entsprechende Orientierung des Randes, die wir extra angeben, weil die Orientierung einer nulldimensionalen Mannigfaltigkeit immer etwas Verwirrendes hat: Hier lassen wir um einen Randpunkt Karten

$$h : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}_-, 0) \quad \text{und} \quad k : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}_+, 0)$$

zu, und erteilen dem Punkt $p \in \partial M$ die Orientierung $(+1)$, wenn die erste Karte h orientierungserhaltend ist (zum gewählten orientierten Atlas von M gehört), und (-1) , wenn die zweite Karte orientierungserhaltend ist.



Eine eindimensionale Mannigfaltigkeit ist übrigens immer orientierbar, und bis auf Diffeomorphismus sind

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}_+, \quad [0, 1], \quad S^1$$

sämtliche nicht leeren zusammenhängenden (berandeten) eindimensionalen Mannigfaltigkeiten — es ist nur etwas fummelig, sich das zu überlegen.

Allerdings geht in berandeten Mannigfaltigkeiten nicht alles wie in unberandeten: Das kartesische Produkt berandeter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten ist nicht auf kanonische Weise eine berandete differenzierbare Mannigfaltigkeit, es hat “Ecken”, die man

erst aufbiegen müßte. Insbesondere ein Produkt von Intervallen ist ein **Rechteck**

$$B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i], \quad a_i < b_i.$$

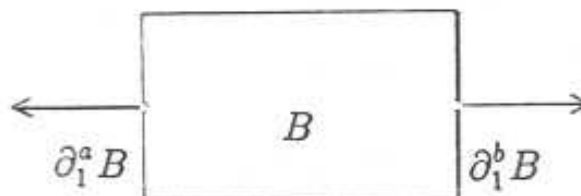
Sein Rand ist definiert als die Vereinigung der **Seiten**

$$\partial_i^a B = \{x \in B \mid x_i = a_i\}, \quad \partial_i^b B = \{x \in B \mid x_i = b_i\}.$$

Ganz analog, wie für berandete Mannigfaltigkeiten, orientieren wir die Seiten $\partial_i^a B$, $\partial_i^b B$ durch die Volumenformen

$$(-)^i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n \quad \text{bzw.} \quad (-)^{i+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

wobei hier und fortan die **Tarnkappe** $\widehat{}$ über einem Zeichen bedeutet, daß dieses Zeichen wegzulassen ist.



Eine $(n-1)$ -Form auf B schreibt sich

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

und wir definieren, wie es dann nahe liegt, das Integral über den orientierten Rand von B durch die Formel

$$\int_{\partial B} \alpha = \sum_{i=1}^n (-)^i \left[\int_{\partial_i^a} a_i(x) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_n - \int_{\partial_i^b} a_i(x) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_n \right].$$

Beachten wir, daß für eine Form $\alpha \in \Omega^{n-1} M$ einer berandeten orientierten Mannigfaltigkeit M das Integral $\int_{\partial M} \alpha$ wohldefiniert ist, und daß unsere Erklärungen für das Rechteck ganz analog verallgemeinernd sind. Das Rechteck, wenn auch nicht so glatt, ist natürlich doch so einfach, daß man es mal zur Anleitung und um etwas auszurechnen betrachten möchte. In der Tat, läßt man aus B die niederdimensionalen Seiten weg, also alles, was im Durchschnitt von mindestens zwei der oben definierten Seiten liegt, so erhält man die orientierte differenzierbare berandete Mannigfaltigkeit B' , und was wir erklärt haben bedeutet

$$\int_{\partial B} \alpha := \int_{\partial B'} \alpha.$$

Ist übrigens $\dim M = 0$, so ist eine Nullform eine Funktion $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$; jeder Punkt $p \in M$ ist mit einer Orientierung $\varepsilon_p \in \{1, -1\}$ versehen, und

$$\int \alpha := \sum_{p \in M} \varepsilon_p \cdot \alpha(p).$$

§ 5. Die äußere Ableitung

Den Hauptsatz der Differentialrechnung einer Variablen kann man folgendermaßen formulieren: Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Nullform, also eine C^1 -Funktion. Wir ordnen ihr die Differentialform $d\alpha := \alpha' \cdot dx$ vom Grad 1 zu. Dann ist

$$\int_{[a,b]} d\alpha = \int_{\partial[a,b]} \alpha.$$

Das Integral über die zwei Punkte $\partial[a, b] = \{a, b\}$ und ihre Orientierung sind gerade so erklärt, daß auf der rechten Seite richtig $\alpha(b) - \alpha(a)$ herauskommt. Wir möchten eine Ableitung

$$d : \Omega^{k-1}M \rightarrow \Omega^k M$$

von Differentialformen auf natürliche Weise so erklären, daß für jede orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $B \subset M$ mit Rand gilt

$$(*) \quad \int_{\partial B} \alpha = \int_B d\alpha$$

für $\alpha \in \Omega^{k-1}M$ oder gleich allgemeiner (oder speziell $M = B$) für $\alpha \in \Omega^{k-1}B$.

Hier beachte: Ist $\alpha \in \Omega^k M$ und hat man eine Untermannigfaltigkeit mit Inklusion $i : B \hookrightarrow M$, so ist $i^*\alpha =: \alpha|_B \in \Omega^k B$, und wir schreiben fast immer wieder kurz α für $\alpha|_B$.

Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Rand und $i : \partial M \hookrightarrow M$ die Inklusion des Randes, so hat man die ganz entsprechende Einschränkung von $\alpha \in \Omega^k M$ auf den Rand. Sie ist in lokalen Karten $h : (M, p) \rightarrow \mathbb{R}_-^n$ festgelegt durch

$$i^* : dh_1 \mapsto 0, \quad dh_j \mapsto dh_j \quad \text{für } j > 1.$$

Es zeigt sich nun, daß man eine Ableitung d im wesentlichen nur auf eine Weise so definieren kann, daß die Formel (*) richtig wird. Die Definition sprechen wir aus in dem

(5.1) Satz (über die äußere Ableitung). Sei M eine berandete differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\Omega_r^k M$ jeweils der Modul der C^r -Differentialformen vom Grad k auf M . Dann gibt es genau eine Abbildung, die äußere Ableitung

$$d : \Omega_r^k M \rightarrow \Omega_{r-1}^{k+1} M, \quad r \geq 1,$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-)^s \alpha \wedge d\beta$ für $\alpha \in \Omega^s M$.
- (ii) d ist \mathbb{R} -linear.
- (iii) Ist $\varphi \in C^r M = \Omega_r^0 M$, so ist $d\varphi$ das Differential von φ .

(iv) $dd = 0$ für $r \geq 2$.

Für die äußere Ableitung gilt darüber hinaus:

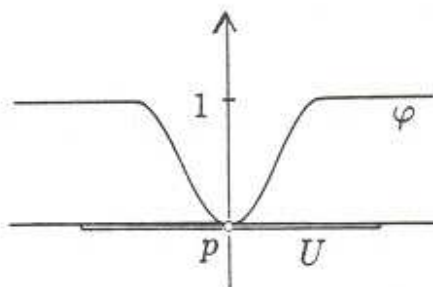
(v) **Natürlichkeit.** Ist $h : M \rightarrow N$ eine C^r -differenzierbare Abbildung, so ist

$$h^* \circ d = d \circ h^*.$$

(vi) Auf einer offenen Menge des \mathbb{R}^n ist d gegeben durch

$$d(\varphi \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = d\varphi \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \quad i_1 < \cdots < i_k.$$

Beweis: Eindeutigkeit. Verschwindet α in einer Umgebung U von p , so folgt aus (i) — (iii) jedenfalls $(d\alpha)_p = 0$. Man kann nämlich eine C^∞ -Funktion φ auf M finden, so daß $\varphi(p) = 0$ und $\varphi = 1$ außerhalb U , dann ist $\alpha = \varphi \cdot \alpha$, also $d\alpha = d(\varphi \cdot \alpha) = d(\varphi \wedge \alpha) = d\varphi \wedge \alpha + \varphi \cdot d\alpha = 0$ im Punkt p .



Lokal um einen Punkt $p \in M$ stimmt aber eine Form $\alpha \in \Omega^k M$ überein mit einer Summe zerlegbarer Formen

$$\psi \cdot d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_k$$

für gewisse auf ganz M definierte C^∞ -Funktionen α_j , die man zum Beispiel so wählen kann, daß α_j lokal um p die j -te Koordinatenfunktion einer Karte ist. Dann ist $d\alpha$ offenbar durch (i) — (iv) bestimmt, und zwar folgt durch Induktion nach k mit (iv) sofort $d(d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_k) = 0$, also

$$d(\psi \cdot d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_k) = d\psi \wedge d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_k$$

nach (iii). Das zeigt die Eindeutigkeit und zugleich, daß (vi) aus (i) — (iv) folgt.

Existenz. Auf offenen Mengen in \mathbb{R}_+^n definieren wir d durch (vi), und weisen (i) — (v) für offene Mengen in \mathbb{R}_+^n nach. Durch Wahl einer Karte wird dann mit (v) die Abbildung d lokal um einen Punkt in M definiert, und dies ist unabhängig von h . Ist nämlich für einen Kartenwechsel g lokal

$$\omega = h^* \alpha = (gh)^* \beta = h^* g^* \beta$$

mit $g^* \beta = \alpha$, so ist

$$d\omega = dh^* \alpha := h^* d\alpha = h^* dg^* \beta \stackrel{(v)}{=} h^* g^* d\beta = (gh)^* d\beta =: d\omega.$$

Nun zu dem Beweis von (i) — (v) aus (vi) für offene Mengen in \mathbb{R}^n . Die Eigenschaften (ii), (iii) sind trivial. Zu (i) sei $S = \{i_1, \dots, i_s\}$, $T = \{j_1, \dots, j_t\}$ und

$$\alpha = \varphi dx_S, \quad \beta = \psi dx_T, \quad \text{also} \quad \alpha \wedge \beta = \varphi \cdot \psi \cdot dx_S \wedge dx_T$$

mit den Bezeichnungen von (2.7).

Dann dürfen wir $S \cap T = \emptyset$ annehmen, weil sonst in (i) beide Seiten verschwinden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(\varphi\psi dx_S \wedge dx_T) := d(\varphi\psi) \wedge (dx_S \wedge dx_T) = (\psi d\varphi + \varphi d\psi) \wedge dx_S \wedge dx_T \\ &= d\varphi \wedge dx_S \wedge (\psi dx_T) + (-)^s(\varphi dx_S) \wedge (d\psi \wedge dx_T) := d\alpha \wedge \beta + (-)^s\alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Für (iv) betrachten wir eine Form $\alpha = \varphi dx_S$, was wegen der Linearität von d genügt. Dann ist $dd\alpha = d(d\varphi \wedge dx_S)$, und nach der Produktregel (i), die wir eben gezeigt haben, genügt es $dd\psi = 0$ für eine C^2 -Funktion ψ zu zeigen. Aber $d\psi = \sum_{i=1}^n (\partial\psi/\partial x_i) dx_i$, also $dd\psi = \sum_{i,j} (\partial^2\psi/\partial x_i\partial x_j) dx_i \wedge dx_j = 0$, weil $\partial^2/\partial x_i\partial x_j$ symmetrisch und $dx_i \wedge dx_j$ antisymmetrisch in i und j ist.

Schließlich zur **Natürlichkeit** (v) der äußeren Ableitung: Für eine Funktion $\varphi \in \Omega^0$ gilt offenbar

$$h^*d\varphi = d(\varphi \circ h) =: d(h^*\varphi).$$

Ist nun $\alpha = d\varphi$ und φ eine C^2 -Funktion, so ist

$$h^*d\alpha = h^*dd\varphi = 0 \quad \text{und} \quad dh^*\alpha = ddh^*\varphi = 0.$$

Allgemein schreibt sich α lokal als Summe von Produkten von Formen dieser beiden Typen, und es genügt zu zeigen:

$$h^*d\alpha = dh^*\alpha \quad \text{und} \quad h^*d\beta = dh^*\beta \implies h^*d(\alpha \wedge \beta) = dh^*(\alpha \wedge \beta),$$

und das ist leicht:

$$\begin{aligned} h^*d(\alpha \wedge \beta) &= h^*(d\alpha \wedge \beta + (-)^s\alpha \wedge d\beta) = h^*d\alpha \wedge h^*\beta + (-)^s h^*\alpha \wedge h^*d\beta \\ &= dh^*\alpha \wedge h^*\beta + (-)^s h^*\alpha \wedge dh^*\beta = d(h^*\alpha \wedge h^*\beta) = dh^*(\alpha \wedge \beta). \end{aligned}$$

□

Nun haben wir bisher die äußere Ableitung nur mit Amtsautorität vorgestellt, aber noch nicht gezeigt, daß sie erfüllt, worauf wir eigentlich hinauswollen. Das aber sagt der sogenannte

(5.2) Satz von Stokes (für ein Rechteck). Sei B ein n -dimensionales Rechteck und α eine stetig differenzierbare Differentialform vom Grad $n - 1$ auf B , dann ist

$$\int_{\partial B} \alpha = \int_B d\alpha.$$

Beweis: Wir dürfen annehmen $\alpha_x = \varphi(x) \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$, denn jedes α ist eine Summe von Formen dieser Art, und beide Seiten der Formel sind linear in α . Dann schreiben wir $B = [a, b] \times \tilde{B}$, mit entsprechender Zerlegung der Koordinaten $x = (x_1, \tilde{x})$, und

$$\int_{\partial B} \alpha = \int_{\tilde{B}} (\varphi(b, \tilde{x}) - \varphi(a, \tilde{x})) = \int_{[a, b]} \int_{\tilde{B}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, \tilde{x}) = \int_B d\alpha,$$

denn $d\alpha = d\varphi/\partial x_1 \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. □

Diese einfachste Version des Satzes von Stokes liefert zugleich eine geometrische Deutung der äußeren Ableitung. Sei nämlich β eine Differentialform vom Grad k auf einer offenen Menge — sagen wir um den Ursprung — in \mathbb{R}^n . Wir kennen β_0 , wenn wir für jeden k -dimensionalen Teilraum $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ die Einschränkung $(\beta|_{\mathbb{R}^k})_0$ kennen. Es genügt also, $d\alpha$ für eine lokal um 0 definierte $(k-1)$ -Form α auf \mathbb{R}^k zu deuten. Für $0 < t \leq 1$ sei $t: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Abbildung $x \mapsto tx$. Dann sagt der Satz von Stokes, wenn B ein Rechteck mit Mittelpunkt 0 ist und “vol” das k -dimensionale Volumen bezeichnet:

$$\int_{\partial(tB)} \alpha = \int_{tB} d\alpha, \quad \text{also} \quad \int_{\partial(tB)} \alpha/\text{vol}(tB) = \int_{tB} d\alpha/\text{vol}(tB).$$

Aber wenn $d\alpha$ stetig ist, was wir ja voraussetzen, und wir

$$d\alpha = a(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

schreiben, konvergiert die rechte Seite offenbar gegen $a(0)$. Also gilt auf dem k -dimensionalen Würfel B mit Mittelpunkt 0

$$a(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial(tB)} \alpha/\text{vol}(tB).$$

Und das macht dann auch klar, daß wir letztlich den Satz von Stokes herausbekommen, weil die äußere Ableitung so definiert ist, daß der Satz infinitesimal gilt. Das schmälert nicht die Bedeutung des Satzes. Die mathematische Einsicht und Errungenschaft liegt eben darin, daß man den richtigen infinitesimalen Kalkül der alternierenden Differentialformen gefunden hat, in dem der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im Höherdimensionalen seine vollkommene natürliche Formulierung findet.

Ist $\alpha \in \Omega^k M$, so heißt die Form $d\alpha \in \Omega^{k+1} M$ auch der **Korand** von α , und die Form α heißt **geschlossen**, wenn $d\alpha = 0$. Jeder stetig differenzierbare Korand ist geschlossen, denn $dd = 0$. Auch jede stetig differenzierbare Differentialform vom Grad n auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist geschlossen, denn ist $\alpha \in \Omega^n M^n$, so ist $d\alpha \in \Omega^{n+1} M^n = 0$.

In der Funktionentheorie integriert man Differentialformen $\alpha = f(z) dz$ mit holomorphem f über Kurven in \mathbb{C} . Es ist

$$d\alpha = d(f dz) = \partial f/\partial z \cdot dz \wedge dz + \partial f/\partial \bar{z} \cdot d\bar{z} \wedge dz = \partial f/\partial \bar{z} \cdot d\bar{z} \wedge dz.$$

Also eine Form $f dz$ ist geschlossen genau wenn $\partial f / \partial \bar{z} = 0$, also wenn f holomorph ist. Um das in unsere Begriffe einzuordnen, muß man die komplexen Differentialformen nach Real- und Imaginärteil zerlegen und als Paare reeller Differentialformen lesen.