Kapitel VI
Die klassischen Integralsätze

felicitas enim est perfecta
humani intellectus operatio.
Thomas

Wir beginnen mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung im Mehrdimensionalen. Er stiftet eine enge Beziehung zwischen Geometrie und Analysis, die erst bei genügend allgemeiner und abstrakter Formulierung so einfach und natürlich hervortritt, daß man sie zum Beweis geometrischer Sätze unmittelbar benutzen kann. Dann erklären wir die Wirkung von Homotopien auf den Komplex der Differentialformen und das Integral, wir führen Riemannsche Metriken ein und formulieren den Hauptsatz für Riemannsche Mannigfaltigkeiten als Divergenzsatz. Schließlich bringen wir die Spezialisierung der allgemeinen Theorie als Vektoranalysis im Dreidimensionalen.

§ 1. Der Hauptsatz

Obwohl er vielleicht verdiente, nach Gauß, und nach manchem sonst zu heißen, nennt man ihn nach einem klassischen Spezialfall auch den

(1.1) Satz von Stokes. *Sei M eine orientierte berandete n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und α eine stetig differenzierbare Differentialform vom Grad $n-1$ auf M mit kompaktem Träger. Dann ist*

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_M d\alpha.$$

Beweis: Wähle einen orientierten Atlas, dessen Karten orientierungserhaltende Diffeomorphismen $h_\lambda : U_\lambda \cong \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n_-$ bzw. $\mathbb{R}^n_+$ sind, wobei in den beiden letzten Fällen jeweils $h_\lambda(U_\lambda \cap \partial M) = \partial\,\mathbb{R}^n_-$ bzw. $\partial\,\mathbb{R}^n_+$ sind. Weil es um jeden Punkt von M eine solche Karte gibt, ist das möglich. Sei $(\varphi_\lambda | \lambda \in M)$ eine dem Atlas untergeordnete glatte Partition der Eins und sei $\alpha_\lambda = \varphi_\lambda \cdot \alpha$, dann ist $\alpha_\lambda = 0$ außer für endlich viele λ, weil

α kompakten Träger hat. Es genügt offenbar, den Satz für jedes α_λ zu zeigen, also man darf annehmen, daß $\mathrm{Tr}\,\alpha$ in einem der obigen Kartengebiete U_λ liegt. Weil aber das Integral transformationsinvariant und die äußere Ableitung natürlich ist (V, 5.1, v), darf man annehmen, daß $M = \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n_-$ bzw. $\mathbb{R}^n_+$, jeweils mit der Standardorientierung ist. In diesem Fall nun folgt der Satz geradeso wie für das Rechteck, Beweis von (V, 5.2). In der Tat führt man diesen Fall leicht auf den des Rechtecks zurück. Kurz zusammengefaßt: Mit einer Partition der Eins führt man den Satz auf den Fall zurück, daß $M = \mathbb{R}^n$ bzw. $M = \mathbb{R}^n_-$ oder $M = \mathbb{R}^n_+$ ist, und da führt der Satz von Fubini den Beweis auf den Fall der Dimension 1 zurück. □

Es ist nicht überflüssig vorauszusetzen, daß α kompakten Träger hat, denn das Integral ist nicht mit beliebigen lokal endlichen Summen vertauschbar. In der Tat, sei $n > 0$ und M eine beschränkte *offene* Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, also $\partial M = \varnothing$, und sei $\alpha \in \Omega^n \mathbb{R}^n$. Dann ist $\alpha = d\beta$ für ein $\beta \in \Omega^{n-1}\mathbb{R}^n$, wie man leicht überlegt. Wählt man eine lokal endliche Zerlegung $\beta|M = \Sigma_\lambda \beta_\lambda$ in Formen $\beta_\lambda \in \Omega^{n-1}M$ mit kompakten Trägern, so ist

$$\int_M d\beta_\lambda = \int_{\partial M} \beta_\lambda = 0$$

weil $\partial M = \varnothing$, aber

$$\int_M \Sigma_\lambda\, d\beta_\lambda = \int_M d\,\Sigma_\lambda \beta_\lambda = \int_M \alpha,$$

und dieses Integral existiert bei unseren Annahmen und kann beliebige Werte annehmen. Die Formen $d\beta_\lambda$ sind eben im allgemeinen nicht positiv, auch wenn α positiv ist.

Folgerung. *Unter den Voraussetzungen des Satzes von Stokes gilt: Ist M unberandet, so ist*

$$\int_M d\alpha = 0.$$

Der Hauptsatz, wie sein Name sagt, ist von grundlegender Bedeutung für die Analysis. Man kann zwar mit der Formulierung, die wir jetzt gefunden haben, noch nicht zufrieden sein, denn zum Beispiel der Satz für das Rechteck und für eine Mannigfaltigkeit stehen noch unverbunden nebeneinander und sollten eine gemeinsame Verallgemeinerung für Räume haben, die bis auf nicht zu große Singularitäten Mannigfaltigkeiten sind. Aber darauf soll es uns jetzt nicht so sehr ankommen, wie darauf, den Satz durch seine Anwendungen und Deutungen in Spezialfällen zu interpretieren.

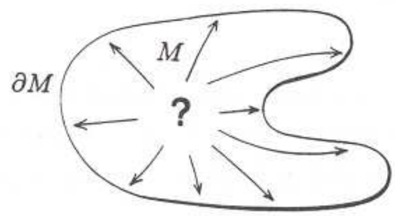
Die einfache Formel des Hauptsatzes, suggestiv durch eine sinnreiche Bezeichnung, stellt eine Beziehung her zwischen etwas Geometrischem, dem Rand ∂M, und etwas Analytischem, der äußeren (oder "orientierten") Ableitung. Und so führt der Satz dazu, daß man aus geometrischen Aussagen analytische erhält, wie schon in der letzten Folgerung, aber auch aus analytischen Aussagen geometrische. Dafür ein Beispiel:

(1.2) Satz. *Sei M eine kompakte berandete orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gibt es keine stetig differenzierbare Abbildung*

$$r : M \to \partial M, \quad r|\partial M = id,$$

also, wie man sagt, keine **Retraktion** *von M auf den Rand.*

In Wahrheit braucht man nicht vorauszusetzen, daß M orientiert und daß r differenzierbar ist, aber wir benutzen es hier.



Beweis: Wir finden sicher eine C^∞-Differentialform α vom Grad $(n-1)$ auf ∂M, deren Integral über ∂M nicht verschwindet. Zum Beispiel sei α eine Volumenform, welche die Orientierung von ∂M definiert. Aber wenn es die Retraktion $r : M \to \partial M$, $r|\partial M = \mathrm{id}$ gäbe, wäre damit

$$0 \neq \int\limits_{\partial M} \alpha = \int\limits_{\partial M} r^*\alpha = \int\limits_M dr^*\alpha = \int\limits_M r^*d\alpha = \int\limits_M 0 = 0. \qquad ✠$$

Weil nämlich $\dim \partial M = n-1$, verschwindet $\Omega^n \partial M$, also insbesondere ist $d\alpha = 0$. □

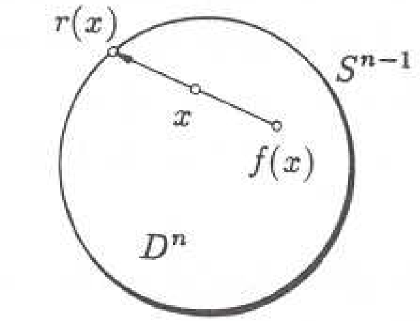
Aus dieser Anwendung folgt der berühmte

(1.3) Fixpunktsatz von Brouwer. *Sei $D^n = \{|x| \leq 1\}$ der kompakte n-Ball in $\mathbb{R}^n$, und sei $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, die den Rand $S^{n-1} = \partial D^n$*

nach D^n abbildet. Dann besitzt f einen Fixpunkt, es gibt also ein $p \in D^n$, so daß $f(p) = p$.

Beweis: Andernfalls erhielte man eine Retraktion

$$r : D^n \to S^{n-1}, \quad x \mapsto x + \tau(x) \cdot u(x), \quad u(x) := (x - f(x))/|x - f(x)|,$$



wobei man τ so bestimmt, daß $|r(x)| = 1$ ist, also

$$\tau = -\langle x, u\rangle + \sqrt{1 - |x|^2 + \langle x, u\rangle^2}.$$

Der Radikant ist stets größer als Null; es ist ja $|x|^2 \leq 1$, und falls $|x| = 1$, ist $\langle x, u\rangle \neq 0$, denn am Rand von D^n kann u nicht senkrecht zu x sein. Also ist τ stetig differenzierbar von x abhängig, also r ist stetig differenzierbar, ein Widerspruch zu (1.2). □

Hier sieht man leicht, daß es auch keine *stetige* fixpunktfreie Abbildung derselben Art gibt. Hätte man eine stetige, so daß $|f(x) - x| \geq \delta > 0$ auf D^n, so müß te man sie nur genügend gut glatt approximieren, und man hätte auch eine glatte.

In der Funktionentheorie liefert der Satz von Stokes eine Version von Cauchys Integralsatz. Ist M eine kompakte berandete differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}$, ein glatt berandetes Gebiet, und ist $f\,dz$ eine geschlossene Differentialform auf M, das heißt mit anderen Worten, ist f holomorph, so gilt

$$\int_{\partial M} f\,dz = \int_M d(f dz) = \int_M 0 = 0.$$

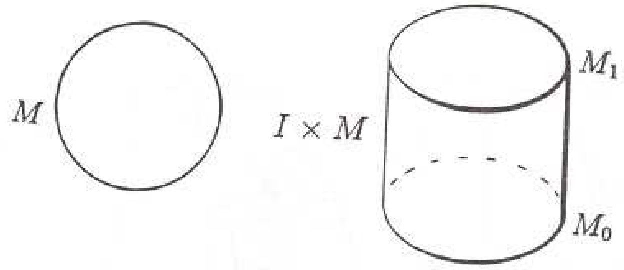
Die Mannigfaltigkeiten, die wir hier betrachten, sind stets orientiert. Ist M eine orientierte Mannigfaltigkeit, etwa orientiert durch die Volumenform ω, so wollen wir dieselbe Mannigfaltigkeit mit der durch $-\omega$ gegebenen inversen Orientierung mit $-M$ bezeichnen. Dann ist insbesondere

$$\int_M \alpha = -\int_{-M} \alpha.$$

§ 2. Der Monodromiesatz

Sei M eine geschlossene orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit, also M sei kompakt ohne Rand, und sei $I = [0,1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall. Der **Zylinder** über M ist die berandete Mannigfaltigkeit $I \times M$. Die differenzierbare Struktur des Zylinders kann man durch einen Atlas beschreiben, der zu jeder orientierten Karte $h : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$ von M die folgenden beiden Karten hat:

$$[0,1) \times U \to (-1,0] \times U' \subset \mathbb{R}^{n+1}_-, \qquad (t,p) \mapsto (-t, h(p)),$$
$$(0,1] \times U \to (-1,0] \times U' \subset \mathbb{R}^{n+1}_-, \qquad (t,p) \mapsto (t-1, h(p)).$$



Ist I durch die Volumenform dt orientiert, wie es naheliegt, und M durch eine Volumenform ω, so ist $I \times M$ auf natürliche Weise durch die Volumenform $\gamma = \mathrm{pr}_1^* dt \wedge \mathrm{pr}_2^* \omega$ orientiert, also wenn $v_1, \dots, v_n$ Tangentialvektoren in $p \in M$ sind, so ist

$$\gamma(\partial/\partial t, v_1, \dots, v_n) = \omega(v_1, \dots, v_n).$$

Demnach ist von den beiden genannten Karten des Zylinders die erste orientierungsumkehrend, die zweite orientierungserhaltend, und für die induzierten Orientierungen auf dem Rande ist

$$\partial(I \times M) = M_1 - M_0 \quad \text{mit} \quad M_\nu := \{\nu\} \times M \cong M, \quad M_1 - M_0 := M_1 \sqcup (-M_0).$$

Diese Erklärungen dienen folgender Definition:

Seien $f_0, f_1 : M \to N$ zwei C^k-Abbildungen. Eine C^k-**Homotopie** zwischen f_0 und f_1 ist eine C^k-Abbbildung

$$F : I \times M \to N, \quad (t,p) \mapsto F(t,p) =: f_t(p),$$

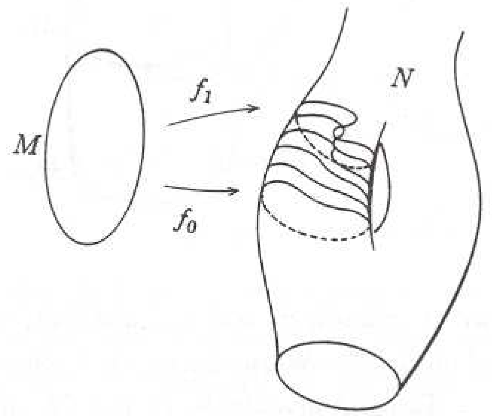
so daß $F(0,p) = f_0(p)$, $F(1,p) = f_1(p)$ für alle $p \in M$. Zwei C^k-Abbildungen heißen C^k-**homotop**, wenn es zwischen ihnen eine C^k-Homotopie gibt.

Es ist nicht schwer zu sehen, daß "C^k-homotop" eine Äquivalenzrelation ist. Man muß eine kleine technische Schwierigkeit überwinden, weil beim Zusammensetzen von Homotopien die Differenzierbarkeit an der Naht verlorengehen kann. Aber das soll uns jetzt nicht kümmern, wir gehen einfach zur erzeugten Äquivalenzrelation über. Tatsächlich sind zwei C^k-Abbildungen genau dann C^k-homotop, wenn sie C^0-homotop sind.

(2.1) Monodromiesatz. *Sei M eine geschlossene orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m und N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sei α eine geschlossene C^1-Differentialform vom Grad m auf N, dann hängt*

$$\int_M f^*\alpha$$

nur von der C^1-Homotopieklasse von $f : M \to N$ ab.



Beweis: Sei $F : I \times M \to N$ eine C^1-Homotopie zwischen f_0 und f_1, dann ist

$$0 = \int_{I\times M} 0 = \int_{I\times M} F^* d\alpha = \int_{I\times M} dF^*\alpha = \int_{M_1 - M_0} F^*\alpha = \int_M f_1^*\alpha - \int_M f_0^*\alpha.$$

□

Die Voraussetzung, daß α geschlossen (also $d\alpha = 0$) ist, ist jedenfalls erfüllt, wenn $\dim N = m$.

Auf dem Monodromiesatz beruhen viele geometrische Anwendungen der Analysis, er liefert eine notwendige Bedingung dafür, daß zwei Abbildungen homotop sind.

(2.2) Beispiel. *Die Identität $M^n \to M^n$ einer geschlossenen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension $n > 0$ ist nicht homotop zur Projektion* $\mathrm{pr} : M^n \to \{p\}$ *auf einen Punkt, also M läßt sich nicht (stetig differenzierbar) in sich zusammenziehen.*

Beweis: Wähle eine Differentialform α vom Grad n auf M, deren Integral nicht verschwindet, zum Beispiel die Volumenform, die die Orientierung von M definiert. Wäre die Identität von M homotop zur Projektion auf p, so wäre

$$0 \neq \int_M \alpha = \int_M \mathrm{id}^*\alpha = \int_M \mathrm{pr}^*\alpha = \int_M 0 = 0, \qquad \maltese$$

weil die Tangentialabbildung der Projektion pr verschwindet. □

Um die Kraft des Monodromiesatzes, und damit natürlich eigentlich des Satzes von Stokes zu zeigen, geben wir als Anwendung einen Beweis für den

(2.3) Fundamentalsatz der Algebra. *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt eine komplexe Nullstelle.*

Beweis: Das Polynom sei $g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, und es sei angenommen, daß g auf $\mathbb{C}$ keine Nullstelle besitzt. Dann hätte man eine wohldefinierte Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C} \to S^1, \quad z \mapsto g(z)/|g(z)|,$$

und die Homotopie $(t,z) \mapsto \varphi(t\cdot z)$, $0 \leq t \leq 1$ zeigt, daß $\varphi|S^1$ homotop zur Projektion auf den Punkt $a_n/|a_n| \in S^1$ ist. Andererseits hat man auch die Homotopie $(t,z) \mapsto \varphi(t^{-1}z)$, $0 \leq t \leq 1$. Es ist nämlich

$$\varphi(t^{-1}z) = \frac{z^n + ta_1 z^{n-1} + \cdots + t^n a_n}{|z^n + ta_1 z^{n-1} + \cdots + t^n a_n|}$$

auch in $t = 0$ wohldefiniert, mit dem Wert z^n für $z \in S^1$. Demnach würde also folgen, daß die Abbildung $f : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ homotop zu $\varphi|S^1$ und diese homotop zur Projektion auf einen Punkt ist. Wegen letzterem wäre $\int_{S^1} f^*\alpha = 0$ für jede Differentialform α vom Grad 1 auf S^1. Aber das ist offenbar falsch, vielmehr ist

$$\int_{S^1} f^*\alpha = n \int_{S^1} \alpha,$$

weil die Einschränkung von f auf jeden Winkelbereich

$$\{z = e^{2\pi i\vartheta} \mid k/n < \vartheta < (k+1)/n\} \to S^1 \setminus \{1\}$$

orientierungserhaltend diffeomorph ist. Und man kann α leicht so wählen, daß die rechte Seite nicht verschwindet. □

Der Student wird im Laufe seines Studiums viele Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra kennenlernen. Die funktionstheoretischen sind dem hier vorgeführten in Wahrheit eng verwandt, denn Cauchys Integralsatz ist ein Korollar des Satzes von Stokes. Wäre es nur um das Ergebnis zu tun, so würde man ein elementares Argument vorziehen, aber hier liegt eine allgemeine Methode zugrunde: Das Integral liefert eine Homotopieinvariante.

Auch die Antipodenabbildung $\tau : S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$ bietet sich zur Untersuchung an.

(2.4) Satz *(vom Igel). Die Antipodenabbildung $\tau : S^n \to S^n$ ist genau dann homotop zur Identität, wenn n ungerade ist und genau dann gibt es auch auf S^n ein C^1-Vektorfeld ohne Nullstellen.*

Beweis: Wir orientieren S^n durch die schon früher betrachtete kanonische Volumenform $\omega_x^n = \det(x, v_1, \dots, v_n)$, indem wir T_xS^n als den Teilraum $\{v \mid \langle x, v\rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ auffassen. Ist τ homotop zur Identität, so ist

$$0 \neq \int_{S^n} \omega = \int_{S^n} \tau^*\omega = (-)^{n+1} \int_{S^n} \omega,$$

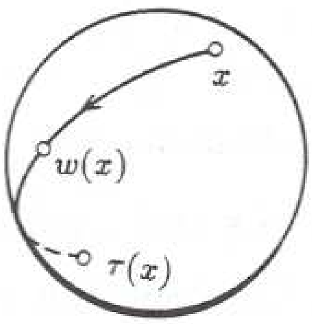
also n ungerade. Ist n ungerade, so ist $n = 2m-1$ und $S^{2m-1} \subset \mathbb{C}^m$; wir zerlegen dementsprechend Vektoren in Real- und Imaginärteil $x = u + iv$, und haben folglich ein C^∞-Vektorfeld ohne Nullstellen

$$x \mapsto i \cdot x = -v + iu \in T_xS^n.$$

Hat man schließlich auf S^n ein C^1-Vektorfeld ohne Nullstellen $x \mapsto w(x) \in T_xS^n$, so darf man annehmen $|w| = 1$, man dividiere nur durch $|w|$. Also hätte man eine C^1-Abbildung $w : S^n \to S^n$, mit $\langle x, w(x)\rangle = 0$. Dann erhält man eine Homotopie

$$\varphi_t : S^n \to S^n, \quad \varphi_0 = \mathrm{id}, \quad \varphi_1 = \tau, \quad \varphi_t(x) := (\cos \pi t) \cdot x + (\sin \pi t) \cdot w(x).$$

Geometrisch bedeutet das: Die Homotopie bewegt x auf dem Großkreis durch x und $w(x)$ nach $-x$. □



Der Satz sagt insbesondere, daß man dem Igel seinen Stachelpelz nur kämmen kann, wenn er mindestens einen Glatzpunkt hat.

§ 3. Das Lemma von Poincaré.

Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir ordnen ihr die Sequenz von Vektorräumen

$$0 \to \mathbb{R} \to \Omega^0 M \underset{d}{\to} \Omega^1 M \underset{d}{\to} \cdots \to \Omega^n M \to 0$$

zu. Dabei fassen wir $\mathbb{R}$ als den Raum der konstanten Funktionen auf M auf. Die Inklusion $\mathbb{R} \subset \Omega^0 M$ sei auch mit d bezeichnet. Die betrachteten Differentialformen seien beliebig oft stetig differenzierbar.

Wir wissen $d \circ d = 0$, und man nennt eine solche Sequenz von Moduln und Homomorphismen, so daß $d \circ d = 0$, einen **Kettenkomplex**. Dieser spezielle Kettenkomplex heißt der (reduzierte) **de Rham-Komplex** von M.

Wir haben im vorigen Abschnitt etwas über die Wirkung von Homotopien auf Integrale erfahren, und wollen dies jetzt etwas genauer studieren: Wie wirkt eine Homotopie auf Differentialformen oder — nehmt alles nur in allem — was bewirkt eine Homotopie auf dem de Rham-Komplex?

(3.1) Kettenhomotopie-Lemma. *Es seien*

$$i_0,\ i_1 :\ M \to I \times M, \quad x \mapsto (\nu, x), \quad \nu = 0, 1,$$

die Inklusionen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in Boden und Deckel des Zylinders. Dann existiert eine Sequenz von linearen Abbildungen

$$K : \Omega^k(I \times M) \to \Omega^{k-1} M,$$

so daß

$$dK + Kd = i_1^* - i_0^*.$$

Die Abbildungen stellen wir noch einmal in einem Diagramm vor.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "i_0^*"'] \arrow[d, shift left, "i_1^*"] & \Omega^0(I \times M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, "K"] & \cdots \Omega^{k-1}(I \times M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "i_0^*"'] \arrow[d, shift left, "i_1^*"] & \Omega^k(I \times M) \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, "K"] & \cdots \arrow[dl, "K"] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "d"'] & \Omega^0 M \arrow[r, "d"'] & \cdots \Omega^{k-1} M \arrow[r, "d"'] & \Omega^k M \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Beweis: Der Tangentialraum des Zylinders $I \times M$ in (τ, p) zerlegt sich als $T_\tau I \oplus T_p M$. Im ersten Summanden haben wir den Vektor $\partial/\partial t$, repräsentiert durch die Kurve $t \mapsto \tau + t$. Jeder Vektor $v \in T_p M$ definiert den ebenso bezeichneten Vektor $v = (0, v) \in T_\tau I \oplus T_p M$

im zweiten Summanden. Ist nun $\alpha \in \Omega^k(I \times M)$, so setzen wir $K\alpha = 0$ für $k = 0$, und sonst

$$K\alpha(v_1, \ldots, v_{k-1}) := \int_0^1 \alpha(\partial/\partial t, v_1, \ldots, v_{k-1})\, dt.$$

Das ist jedenfalls eine wohldefinierte alternierende Differentialform. Die Behauptung über diese Abbildung K ist nun in M lokal nachzuprüfen. Wir betrachten α also auf einem Gebiet $I \times U$, wo U ein Kartengebiet von M mit Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ ist. Auf $I \times U$ haben wir dann die Koordinaten (t, x) und der Integrand in der Definition von K ist durch Funktionen dieser Variablen gegeben. Wir erhalten explizit:

$$K\alpha = 0 \quad \text{für } \alpha \in \Omega^0,\ K(\varphi\, dx_S) = 0 \text{ und } K(\varphi\, dt \wedge dx_S) = (\int_0^1 \varphi\, dt) dx_S\,.$$

An der Stelle $k = -1$ erhalten wir also $Kd = dK = 0$ und $i_0^* = i_1^* = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Für $k = 0$ ergibt sich $dK = 0$ weil $K = 0$, und $Kd\varphi = \int_0^1 \partial\varphi/\partial t\, dt = (i_1^* - i_0^*)\varphi$. Für $k > 0$ haben wir die folgenden beiden Fälle zu betrachten: $\alpha = \varphi \cdot dx_S$, dann ist $dK\alpha = 0$ und $Kd\alpha = K(d\varphi \wedge dx_S) = (\int_0^1 \partial\varphi/\partial t\, dt)\; dx_S = (i_1^* - i_0^*)\alpha$. Im anderen Fall: $\alpha = \varphi\, dt \wedge dx_S$, also $i_0^*\alpha = i_1^*\alpha = 0$ weil $i_\nu^*\, dt = 0$, und

$$dK\alpha = \sum_\nu (\int_0^1 \partial\varphi/\partial x_\nu\, dt)\, dx_\nu \wedge dx_S,$$

$$Kd\alpha = -\sum_\nu (\int_0^1 \partial\varphi/\partial x_\nu\, dt)\, dx_\nu \wedge dx_S,$$

denn in $Kd\alpha$ wird dx_ν mit dt vertauscht, bevor das Integral berechnet wird. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Wir haben ja schon im Monodromiesatz eine Beziehung zwischen Homotopien und Integralen gefunden. Das Lemma nun ist die technische Vorstufe zu dem folgenden Satz, der genauer ausspricht, wie sich Homotopien auf Differentialformen, oder genauer gesagt auf den de Rham-Komplex auswirken.

(3.2) Kettenhomotopie-Satz. *Die Abbildungen f_0, $f_1 : M \to N$ seien (stetig differenzierbar) homotop. Dann gibt es eine Sequenz von linearen Abbildungen,*

$$K:\ \Omega^k N \to \Omega^{k-1} M,$$

eine sogenannte **Kettenhomotopie** *zwischen f_0^* und f_1^*, so daß*

$$f_1^* - f_0^* = dK + Kd.$$

Beweis: Die Homotopie sei $F : I \times M \to N$, sei $\widetilde{K}$ die Abbildung in (3.1) und $K := \widetilde{K} \circ F^*$, dann ist

$$f_1^* - f_0^* = (Fi_1)^* - (Fi_0)^* = (i_1^* - i_0^*)F^* = (d\widetilde{K} + \widetilde{K}d) \circ F^* = dK + Kd. \qquad \square$$

Eine Form $\alpha \in \Omega^k N$ heißt **geschlossen** oder ein **Kozykel**, wenn $d\alpha = 0$, und sie heißt **exakt** oder ein **Korand**, wenn $\alpha = d\beta$ für ein $\beta \in \Omega^{k-1}N$. Jeder Korand ist ein Kozykel, denn $dd\beta = 0$. Nicht jeder Kozykel ist ein Korand, nicht jede geschlossene Form ist exakt, denn ist $\alpha = d\beta$ und M eine geschlossene k-dimensionale Mannigfaltigkeit, und $f : M \to N$, so ist

$$\int\limits_M f^*\alpha = \int\limits_M f^*d\beta = \int\limits_M df^*\beta = \int\limits_{\partial M} f^*\beta = 0$$

weil $\partial M = \varnothing$. Aber es gibt geschlossene Formen mit nicht trivialem Integral, zum Beispiel in $\Omega^n N^n$, wenn N kompakt ist.

Ist $\alpha \in \Omega^k N$ geschlossen, und wie oben f_0 homotop zu f_1, so ist

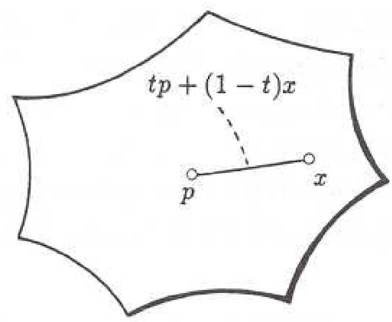
$$f_1^*\alpha - f_0^*\alpha = dK\alpha + Kd\alpha = dK\alpha,$$

weil $d\alpha = 0$. Also $f_0^*\alpha$ und $f_1^*\alpha$ unterscheiden sich um einen Korand — und darum eben unterscheidet sich ihr Integral über eine geschlossene Mannigfaltigkeit nicht.

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M heißt **zusammenziehbar**, wenn die Identität id_M homotop zur Projektion auf einen Punkt ist. Angenommen zum Beispiel M ist eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ und M ist **sternförmig** bezüglich $p \in M$, also für alle $x \in M$ ist auch

$$tp + (1-t)x \in M \quad \text{für} \quad 0 \le t \le 1.$$

Dann ist M zusammenziehbar, die Homotopie ist eben $(t, x) \mapsto tp + (1-t)x$. $\square$



(3.3) Lemma von Poincaré. *In einer zusammenziehbaren differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist jede geschlossene Differentialform exakt.*

Beweis: Sei $\pi : M \to \{p\}$ die Projektion, dann gilt: Ist $d\alpha = 0$, so ist $\alpha = \mathrm{id}^*\alpha = (\mathrm{id}^* - \pi^*)\alpha = dK\alpha$. Hier ist $\pi^*\alpha = 0$ also $\alpha \in \Omega^k M$, $k > 0$, vorausgesetzt. Für $k = 0$ folgt aus $d\alpha = 0$ offenbar, daß α konstant ist, weil M zusammenhängt. $\square$

Für eine zusammenziehbare Mannigfaltigkeit ist also der de Rham-Komplex

$$0 \to \mathbb{R} \underset{d}{\to} \Omega^0 M \underset{d}{\to} \Omega^1 M \underset{d}{\to} \cdots \underset{d}{\to} \Omega^n M \to 0$$

eine exakte Sequenz von Vektorräumen.

Ein bißchen von dieser Exaktheit ist uns schon verschleiert begegnet: Eine Pfaffsche Form

$$\alpha = a_1(x)dx_1 + \cdots + a_n(x)dx_n$$

ist nur dann ein Differential, wenn $\partial a_i/\partial x_j = \partial a_j/\partial x_i$, und das heißt gerade $d\alpha = 0$. Diese Bedingung ist hinreichend in einer zusammenziehbaren offenen Menge. Dort besitzt jede geschlossene Pfaffsche Form ein Potential, eine Funktion φ, so daß $\alpha = d\varphi$. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gibt es jedoch die geschlossene nicht exakte Pfaffsche Form

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

oder in Polarkoordinaten (r, φ) einleuchtender $\alpha = d\varphi$.

Man könnte glauben, die Darstellung $\alpha = d\varphi$ zeige, daß α exakt ist. Aber das täuscht, φ ist ja als Funktion nicht wohldefiniert. Jedoch sehen wir jetzt, daß φ auf einer zusammenziehbaren offenen Teilmenge der gelochten Ebene stets wohl zu definieren ist. Daß $d\varphi$ nicht Differential einer Funktion ist, folgt sofort aus $\int_{S^1} d\varphi = 2\pi \neq 0$.

Auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ erhalten wir nach demselben Muster eine geschlossene nicht exakte $(n-1)$-Form, nämlich wir haben die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}, \quad x \mapsto x/|x|,$$

und auf S^{n-1} die kanonische Volumenform ω^{n-1}, deren Integral über S^{n-1} jedenfalls echt positiv ist, wir werden es bald berechnen (5.7). Dann ist $f^*\omega^{n-1}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ geschlossen, weil $d\omega^{n-1} = 0$, aber nicht exakt.

Ich beschließe diesen Abschnitt mit einer esoterischen Betrachtung, die über den Gegenstand einer Anfängervorlesung hinausweist: In einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M sei

$$Z^k M = \ker(d : \Omega^k M \to \Omega^{k+1} M) = \text{Vektorraum der } k\text{-}\textbf{Kozykel}.$$
$$B^k M = d\Omega^{k-1} M = \text{Vektorraum der } k\text{-}\textbf{Koränder}.$$

Dann ist

$$H^k M := Z^k M / B^k M$$

die **reduzierte k-te de Rham-Kohomologie**.

Eine C^∞-Abbildung $f : M \to N$ induziert eine Abbildung der de Rham-Komplexe

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "d"] & \Omega^0 M \arrow[r, "d"] & \Omega^1 M \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Omega^k M \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1} M \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "d"'] \arrow[u, "f^*"] & \Omega^0 N \arrow[r, "d"'] \arrow[u, "f^*"] & \Omega^1 N \arrow[r] \arrow[u, "f^*"] & \cdots \arrow[r] & \Omega^k N \arrow[r, "d"'] \arrow[u, "f^*"] & \Omega^{k+1} N \arrow[r] \arrow[u, "f^*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

mit $f^* \circ d = d \circ f^*$. Daher ist $f^* Z^k N \subset Z^k M$ und $f^* B^k N \subset B^k M$, und man erhält eine auch mit f^* bezeichnete induzierte Abbildung

$$f^* : \; H^k N \to H^k M,$$

welche natürlich funktoriell ist, also

$$\mathrm{id}^* = \mathrm{id} \quad \text{und} \quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Die Nutzanwendung unserer Betrachtungen über Homotopie ist der

(3.4) Satz. *Sind $f_0, f_1 : M \to N$ zwei C^∞-***homotope Abbildungen***, so ist*

$$f_0^* = f_1^* : \; H^k N \to H^k M.$$

Beweis: Für die Abbildungen der de Rham-Komplexe gilt

$$dK + Kd = f_1^* - f_0^*.$$

Ist also α ein Kozykel, so ist $Kd\alpha = 0$ und daher $f_1^* = f_0^*\alpha + dK\alpha$, also $f_0^*\alpha$ und $f_1^*\alpha$ sind gleich modulo Korändern. □

Die de Rham-Kohomologie liefert also Homotopie-Invarianten. Das Studium dieser Kohomologiegruppen ist Gegenstand der algebraischen Topologie, und hier ist eine Stelle, wo man unmittelbar anschaut, wie sich in der Mathematik der Gegenwart die verschiedenen Gebiete verbinden: Geometrie, Analysis und Algebra.

§ 4. Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Ist $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit, so ist für jeden Punkt $p \in M$ auch $T_p M \subset T_p \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k}$, und man hat daher ein euklidisches Skalarprodukt von Vektoren aus $T_p M$ und die daher kommende euklidische Norm und Längenmessung. Sie bringt eine zusätzliche Struktur auf die Mannigfaltigkeit, die wir allgemein folgendermaßen erklären:

Eine **Riemannsche Mannigfaltigkeit** ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit einer **Riemannschen Metrik**. Eine Riemannsche Metrik auf M ordnet jedem Punkt $p \in M$ eine symmetrische, positiv definite bilineare Abbildung (ein euklidisches Skalarprodukt)

$$T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle_p$$

zu, und zwar beliebig oft **differenzierbar von** p **abhängend**. Das heißt folgendes: Führen wir lokale Koordinaten

$$M \supset U \underset{h}{\to} U' \subset \mathbb{R}^n$$

ein, so erhält für $p \in U$ der Tangentialraum T_pM die Basis der Vektoren

$$\partial/\partial h_i := (T_p h)^{-1} \partial/\partial x_i,$$

welche durch die Wege $t \mapsto h^{-1}(h(p) + t \cdot e_i)$ repräsentiert sind. Das Skalarprodukt ist bestimmt durch die symmetrische Matrix mit Koeffizienten

$$g_{ij}(p) := \langle \partial/\partial h_i, \partial/\partial h_j \rangle_p.$$

Die Matrix (g_{ij}) heißt auch **metrischer Fundamentaltensor**. Die Differenzierbarkeitsforderung lautet: *Die Abbildung* $U \to \mathbb{R}^{n \cdot n}$, $p \mapsto (g_{ij}(p))$ *ist* C^∞*-differenzierbar.*

Die Physiker sind gezwungen, statt euklidischer Skalarprodukte auch symmetrische nicht ausgeartete Bilinearformen zu betrachten, die nicht positiv definit sind, deren zugehörige Matrix $(g_{ij}(p))$ vielmehr die reelle Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

hat, mit der Bilinearform

$$\langle (x_1, y_1, z_1, t_1), (x, y, z, t) \rangle = xx_1 + yy_1 + zz_1 - tt_1.$$

Diese sogenannte **Minkowski-Metrik** auf $\mathbb{R}^4$ kommt aus der Relativitätstheorie, und das meiste, was wir im folgenden sagen, gilt für solche Metriken ganz analog, aber wir wollen uns doch immer an den Fall einer positiv definiten Metrik halten.

Beachte, daß man zwar durch einen linearen Koordinatenwechsel erreichen kann, daß die Matrix (g_{ij}) in einem vorgegebenen Punkt $p \in M$ die Normalform hat, welche die lineare Algebra herstellt, jedoch kann man dieses nicht zugleich in einer ganzen Koordinatenumgebung erreichen.

Beispiele Riemannscher Mannigfaltigkeiten sind wie gesagt alle Untermannigfaltigkeiten eines euklidischen Raumes, und es ist nicht schwer, mit einer Partition der Eins auf einer beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik einzuführen.

Auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M hat man eine **kanonische Volumenform**

$$\omega = \omega_M \in \Omega^n M.$$

Sie ist dadurch bestimmt, daß sie einer positiv orientierten Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von T_pM den Wert 1 zuordnet. Diese Bestimmung ist jedenfalls unabhängig von der Wahl der Basis, denn von einer zur anderen transformiert man mit einer orthonormalen Matrix mit Determinante 1.

Wie berechnet man ω_M in lokalen Koordinaten? Eine reine Frage der linearen Algebra, nämlich was ist $\omega_M(b_1, \dots, b_n)$ für eine beliebige positiv orientierte Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von T_pM? Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis, dann ist

$$b_i = \sum_k \beta_{ki} v_k, \quad \text{also} \quad \langle b_i, b_j \rangle = \sum_{k,\ell} \beta_{ki}\beta_{\ell j} \langle v_k, v_\ell \rangle = \sum_k \beta_{ki}\beta_{kj}.$$

Setzen wir also $(g_{ij}) = (\langle b_i, b_j \rangle)$ und $B = (\beta_{ij})$, so ist

$$\omega_M(b_1, \dots, b_n) = \det B, \quad \text{und} \quad (\det B)^2 = \det {}^tB \cdot B = \det(g_{ij}).$$

Wir erhalten daher:

(4.1) Satz. *Ist $h : (M, p) \to \mathbb{R}^n$ eine orientierte Karte einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, und*

$$(g_{ij}) = (\langle \partial/\partial h_i, \partial/\partial h_j \rangle), \quad \det(g_{ij}) = g,$$

ihr metrischer Fundamentaltensor, so ist die kanonische Volumenform gegeben durch

$$\omega_M(\partial/\partial h_1, \dots, \partial/\partial h_n) = \sqrt{g}, \quad \textit{oder} \quad \omega_M = \sqrt{g} \cdot dh_1 \wedge \dots \wedge dh_n.$$

□

Auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M kann man jetzt auch das Integral einer Funktion erklären durch

$$\int_M f := \int_M f \cdot \omega_M,$$

und dieses ist gemeint, wenn man zum Beispiel von $\int_{S^n} f$ oder sonst von Integralen einer Funktion über Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ redet.

In der Tat ist die Orientierung hier auch nicht nötig. Mit einer Partition der Eins zieht man sich immer auf den Fall zurück, wo der Träger von f im Gebiet einer Karte $h : U \to \mathbb{R}^n$ liegt. Jetzt kann man jedenfalls die offene Menge U so orientieren, daß h orientierungserhaltend wird. Dann ist die Volumenform ω_U auf U definiert, und

$$\int_M f = \int_U f \cdot \omega_U = \int_{\mathbb{R}^n} (f \cdot \sqrt{g}) \circ h^{-1} dx_1 \dots dx_n.$$

Dieses Integral ist unabhängig von der Wahl der Karte h, und zwar bleibt es auch invariant, wenn man h mit φ orientierungsumkehrend transformiert, denn dann wird auch $-\omega_U$ die Volumenform, für die die transformierte Karte $k = \varphi h$ orientierungserhaltend ist. So hat man auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten ein kanonisches Integral von Funktionen oder anders gesagt, ein kanonisches Maß $\mathrm{vol} = \mathrm{vol}_M$, das für orientierte Mannigfaltigkeiten (also lokal) definiert ist durch

$$\mathrm{vol}_M(A) = \int_A \omega_M = \int_M \chi_A \cdot \omega_M.$$

Insbesondere können wir die Funktion 1 über eine kompakte (berandete) Riemannsche Mannigfaltigkeit integrieren, und es ist

$$\mathrm{vol}(M) = \int_M \omega_M$$

das **Volumen** der (berandeten) Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Zum Beispiel ist das Volumen der Sphäre

$$\mathrm{vol}(S^n) = \int_{S^n} \omega, \quad \omega_x(v_1, \ldots, v_n) = \det(x, v_1, \ldots, v_n),$$

wenn man wieder $T_p S^n$ als Teilraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ auffaßt. Natürlich kann uns jetzt nur noch die Bequemlichkeit hindern, dieses Integral sogleich explizit auszurechnen, aber sie hindert uns auch wirklich, das Integral wird uns bald zufallen (5.7).

Eine **Isometrie** Riemannscher Mannigfaltigkeiten ist ein Diffeomorphismus

$$\varphi : M \to N, \quad \text{so daß} \quad T_p\varphi : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$$

für alle $p \in M$ eine Isometrie von Vektorräumen ist. Wie es naheliegt, gilt:

(4.2) Satz. *Ist $\varphi : M \to N$ eine Isometrie Riemannscher Mannigfaltigkeiten, so ist*

$$\int_N f = \int_M f \circ \varphi.$$

Beweis: Mit einer Partition der Eins sieht man sich auf den Fall geführt, wo der Träger von f im Gebiet einer Karte liegt und darf also annehmen, daß M und N orientiert sind und die kanonischen Volumenformen ω_M und ω_N besitzen. Weil die Integrale von der Wahl der Orientierung nicht abhängen, darf man annehmen, daß φ orientierungserhaltend ist. Dann ist aber $\varphi^*\omega_N = \omega_M$, und

$$\int_N f := \int_N f \cdot \omega_N = \int_M f \circ \varphi \cdot \varphi^*\omega_N = \int_M f \circ \varphi \cdot \omega_M = \int_M f \circ \varphi. \qquad \square$$

Zum Beispiel ist die Antipodenabbildung $\tau : S^n \to S^n$ eine Isometrie und daher

$$\int_{S^n} f \circ \tau = \int_{S^n} f.$$

Beim Integral von Differentialformen — wie früher gesagt — kommt hier ein Vorzeichen -1, wenn n gerade ist, aber hier wird auch die kanonische Volumenform durch ihr Negatives ersetzt, das Integral von Funktionen bleibt invariant.

Meistens, wenn von Integralen die Rede ist, wird man wohl Funktionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten integrieren. Hier kommt (im orientierten Fall, der lokal immer vorliegt) alles darauf an, die kanonische Volumenform, also

$$\sqrt{g}, \quad g = (g_{ij}), \quad g_{ij} = \langle \partial/\partial h_i, \partial h_j \rangle$$

für eine Karte h zu berechnen. Dazu wollen wir noch zwei Hinweise geben, die in expliziten Rechnungen sehr nützlich sind.

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, dann erbt M von $\mathbb{R}^{n+k}$ eine Riemannsche Metrik, denn

$$T_pM \subset T_p\,\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k},$$

und $\mathbb{R}^{n+k}$ trage die Standard-Metrik. Sind also $(v_1, \ldots, v_n)$ Vektoren von T_pM, so schreiben sich diese Vektoren als $(n+k)$-Tupel reeller Zahlen

$$v_\nu = (v_\nu^1, \ldots, v_\nu^{n+k}) \in \mathbb{R}^{n+k}, \quad \langle v_\nu, v_\mu \rangle = \sum_{j=1}^{n+k} v_\nu^j v_\mu^j.$$

Bilden wir also die $n \times (n+k)$-Matrix V mit den Zeilen $v_1, \ldots, v_n$, so ist

$$(\langle v_\nu, v_\mu \rangle) = V \cdot {}^tV,$$

und daher, wie wir (V, 1.11) ausgerechnet haben (mit $S = \{i_1, \ldots, i_n\}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_n \le n+k$)

$$\det(\langle v_\nu, v_\mu \rangle) = \sum_{|S|=n} \det(v_\nu^i)_{i \in S} \cdot \det(v_\mu^j)_{j \in S} = \sum_{|S|=n} \det(v_\nu^j)^2_{j \in S}.$$

Ist also $\varphi : (\mathbb{R}^n, r) \to (M, p)$ die lokal definierte Umkehrung einer Karte von M, so hat T_pM die Basis der Vektoren

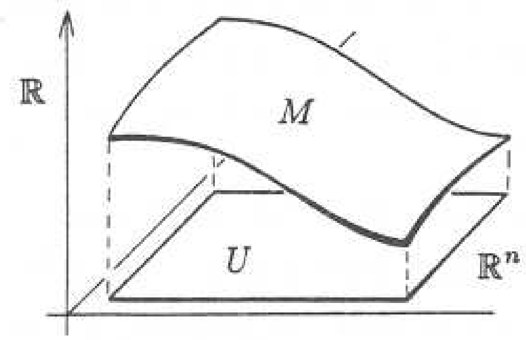
$$v_\nu = \partial\varphi/\partial x_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad \text{mit} \quad T\varphi(\partial/\partial x_\nu) = v_\nu,$$

und daher berechnet sich die kanonische Volumenform ω_M von M in lokalen Koordinaten φ durch

$$\varphi^*\omega = \Big(\sum_{|S|=n} \det(\partial\varphi_j/\partial x_\nu)^2_{j \in S}\Big)^{1/2} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{4.3}$$

Ein Spezialfall entsteht aus einer C^∞-Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Ihr Graph ist nämlich eine Mannigfaltigkeit

$$M = \mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$



welche diffeomorph zu U, also durch *eine* Karte zu beschreiben ist, nämlich die Projektion $\mathrm{pr}_1|M : M \to U$, mit der Umkehrung

$$\varphi : U \to M, \quad x \mapsto (x, f(x)).$$

Wir erhalten in diesem Fall

$$v_\nu := \partial\varphi/\partial x_\nu = (0, \dots, 0, \overset{\nu}{1}, 0, \dots, 0, \partial f/\partial x_\nu),$$

also

$$\langle v_\nu, v_\mu \rangle = \delta_{\nu\mu} + \partial f/\partial x_\nu \cdot \partial f/\partial x_\mu .$$

Wir müssen die Determinante dieser Matrix $(\langle v_\nu, v_\mu\rangle)$ berechnen, oder allgemein, wenn wir $\partial f/\partial x_\nu = f_\nu$ setzen und E die Einheitsmatrix ist

$$(*) \qquad g = \det(E + (f_\nu \cdot f_\mu)).$$

(4.4) Die kanonische Volumenform eines Graphen. *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion, und sei $\varphi(x) = (x, f(x))$. Dann ist die kanonische Volumenform ω des Graphen von f in Koordinaten φ gegeben durch*

$$\varphi^*\omega = [\,1 + \sum_{i=1}^n (\partial f/\partial x_i)^2\,]^{1/2} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Beweis: Wir berechnen die Determinante der Matrix $E + (f_\nu \cdot f_\mu)$, indem wir die Matrix $(f_\nu \cdot f_\mu)$ auf Diagonalform transformieren. Bei der Transformation bleibt die Einheitsmatrix und die gesuchte Determinante unverändert. Nun ist $(f_\nu \cdot f_\mu)$ die Matrix der Zusammensetzung

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[(f_1, \dots, f_n)]{} \mathbb{R} \xrightarrow[\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}]{} \mathbb{R}^n .$$

Falls nicht sowieso alle f_ν verschwinden, hat diese Matrix den Rang 1, also einen Nullraum der Dimension $n-1$, und zur Diagonalisierung müssen wir nur einen nicht trivialen Eigenwert finden. Hier ist der Eigenvektor:

$$^t(f_1, \dots, f_n) \mapsto f_1^2 + \cdots + f_n^2 \mapsto (f_1^2 + \cdots + f_n^2) \cdot {}^t(f_1, \dots, f_n).$$

Also $\lambda = f_1^2 + \cdots + f_n^2$ ist der gesuchte Eigenwert, und wir können die Matrix $E + (f_\nu \cdot f_\mu)$ in die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $g = 1 + \sum_{\nu=1}^n f_\nu^2$ transformieren. Daher der angegebene Ausdruck für $\sqrt{g}$. □

Eine andere Situation, die wir oft betrachtet haben ist, daß eine Mannigfaltigkeit als Nullstellengebilde eines regulären Gleichungssystems vorliegt. Sei U offen in $\mathbb{R}^{n+k}$ und

$$f = (f_1, \dots, f_k) : U \to \mathbb{R}^k$$

eine C^∞-Abbildung. Sei 0 ein regulärer Wert von f und $M = f^{-1}\{0\}$. Dann hat man auf M die nirgends verschwindende Volumenform α, die durch

$$\alpha_p(v_1, \dots, v_n) = \det(\operatorname{grad}_p f_1, \dots, \operatorname{grad}_p f_k, v_1, \dots, v_n)$$

für $p \in M$ und $v_j \in T_pM$ definiert ist. Wir haben sie schon zur Orientierung von M benutzt, jedoch ist α noch nicht die kanonische Volumenform von M. Bildet $(v_1, \dots, v_n)$ ein positiv orientiertes Orthonormalsystem in T_pM, so benutzen wir $\langle \operatorname{grad}_p f_i, v_j \rangle = 0$ und berechnen das Quadrat der Determinante in der Definition von α_p, indem wir die Matrix mit ihrer Transponierten multiplizieren. Es ergibt sich

$$\delta := \det(\langle \operatorname{grad}_p f_i, \operatorname{grad}_p f_j \rangle)_{i,j=1,\dots,k}.$$

Folglich ist $\omega_M = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \alpha$ die kanonische Volumenform von M.

$$\omega_M(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \det(\operatorname{grad}_p f_1, \dots, \operatorname{grad}_p f_k, v_1, \dots, v_n). \tag{4.5}$$

Zum Beispiel haben wir (Bd. 2, IV, 4.7) die kanonische Volumenform des $\mathbb{R}^n$ in Polarkoordinaten berechnet. Das Ergebnis ist in unserer jetzigen Schreibweise

$$\omega = (-)^n r^{n-1} \cdot \sin\vartheta_1 \cdot (\sin\vartheta_2)^2 \dots (\sin\vartheta_{n-2})^{n-2} dr \wedge d\varphi \wedge d\vartheta_1 \wedge \cdots \wedge d\vartheta_{n-2}.$$

Wählen wir $f = r - R$ für konstantes $R > 0$, so ist $|\operatorname{grad}(r-R)| = |\partial/\partial r| = 1$. Die Mannigfaltigkeit $\{f = 0\}$ ist die Sphäre vom Radius R. Die kanonische Volumenform der Sphäre $R \cdot S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist also in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\omega_{R \cdot S^n} = (-)^{n+1} R^n \cdot \sin\vartheta_1 \cdot (\sin\vartheta_2)^2 \cdots (\sin\vartheta_{n-1})^{n-1} d\varphi \wedge d\vartheta_1 \wedge \cdots \wedge d\vartheta_{n-1}. \tag{4.6}$$

Schließlich können wir an dieser Stelle verstehen, was das Integral längs einer Kurve

$$\int_\gamma f = \int_a^b f \circ \gamma(t)\, |\dot\gamma(t)|\, dt,$$

das wir in Band 2 zu Anfang betrachtet haben, mit dem Integral Pfaffscher Formen zu tun hat. Ist $\gamma : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und auch eine differenzierbare Einbettung, so ist $\gamma[\,a, b\,] = \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine eindimensionale (berandete) Mannigfaltigkeit, und sie wird (wenn man pedantisch ist: bis auf die Randpunkte) durch die *eine* Karte γ^{-1} beschrieben. Hier ist die kanonische Volumenform in Koordinaten γ durch

$$\gamma^*\omega_\Gamma = |\dot\gamma|\, dt$$

gegeben, also wir finden das altbekannte Kurvenintegral wieder:

$$\int_\Gamma f = \int_a^b f \cdot |\dot\gamma|\, dt = \int_\gamma f.$$

Auch dies läßt sich verallgemeinern auf den Fall, wo man statt $\mathbb{R}^n$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M hat. Eine C^1-Kurve $\gamma : [\,a, b\,] \to M$ definiert für jedes τ den Vektor

$$\dot\gamma(\tau) = T_\tau\gamma(\partial/\partial t) \in T_{\gamma(\tau)}M,$$

repräsentiert durch die Kurve $t \mapsto \gamma(\tau + t)$, und man definiert insbesondere die Bogenlänge von γ durch

$$s(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma|\, dt; \quad |\dot\gamma| := \sqrt{\langle\dot\gamma, \dot\gamma\rangle}.$$

§ 5. Der Divergenzsatz

Ein **Vektorfeld** v auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M (mit Rand) ist ein Schnitt des Tangentialbündels, also eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor $v(p) \in T_pM$ zuordnet. Im Gebiet einer Karte $h : U \to \mathbb{R}^n$ von M hat der Tangentialraum die Basis der Vektoren

$$\partial/\partial h_i := (T_ph)^{-1}\partial/\partial x_i,$$

und daher ist

$$v(p) = \sum_{i=1}^n v_i(p)\partial/\partial h_i,$$

für gewisse wohlbestimmte Funktionen $v_i : U \to \mathbb{R}$. Das Vektorfeld heißt stetig, glatt, C^k-differenzierbar, ... , wenn diese Funktionen v_i die entsprechende Eigenschaft haben.

Schon im ersten Kapitel haben wir Vektorfelder betrachtet, und sie als autonome Differentialgleichungen gedeutet. Eine stetig differenzierbare Kurve $\alpha : (a,b) \to M$ ist eine Integralkurve von v, wenn für alle $\tau \in (a,b)$ gilt

$$\dot\alpha(\tau) = v(\alpha(\tau)).$$

Dabei ist $\dot\alpha(\tau) = T_\tau\alpha(\partial/\partial t)$ der durch $t \mapsto \alpha(\tau + t)$ repräsentierte Tangentialvektor von M. In lokalen Koordinaten — also in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ — bedeutet das natürlich:

$$\begin{aligned} T_xU &= \mathbb{R}^n, \\ v(x) &= (v_1(x), \ldots, v_n(x)), \\ \alpha &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \\ \dot\alpha_i &= v_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Zu einem C^k-Vektorfeld, $k \geq 1$, gehört wie erinnerlich ein lokaler Fluß Φ, mit

$$\dot\Phi(p,t) = v(\Phi(p,t)), \quad \Phi(p,0) = p.$$

Wir wollen hier unsere Wissenschaft von Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer Differentialgleichung nicht wiederholen. Im Moment werden wir ohnehin nur den lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösung einer Differentialgleichung heranziehen, bei dem ja nur euklidische Umgebungen zu betrachten sind.

Nun sei M eine berandete orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, und ω die kanonische Volumenform auf M. Ist dann v ein Vektorfeld auf M, so erhält man eine Differentialform $\omega \lrcorner v$ vom Grad $(n-1)$ auf M, durch die Formel

$$(\omega \lrcorner v)_p(w_1, \ldots, w_{n-1}) = \omega_p(v(p), w_1, \ldots, w_{n-1}), \quad w_i \in T_pM.$$

Die **Divergenz** des Vektorfeldes v ist dann durch die Formel

$$d(\omega \lrcorner v) = \operatorname{div} v \cdot \omega \tag{5.1}$$

als Funktion auf M definiert.

Der Satz von Stokes liefert unmittelbar:

(5.2) Divergenzsatz. *Ist v ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit kompaktem Träger auf der berandeten orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M, so ist*

$$\int_M \operatorname{div} v = \int_{\partial M} \omega \lrcorner v. \qquad \square$$

Wir wollen beide Seiten dieser Formel näher betrachten. Zunächst die linke — es wäre ja nicht fair, einfach irgendetwas “Divergenz” zu nennen. Hier kommt es auf eine lokale

Betrachtung an, wir denken uns Koordinaten eingeführt, also betrachten eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$. Die Riemannsche Metrik ist durch

$$\langle \partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j \rangle = g_{ij}, \quad \omega = \gamma \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad \gamma = \sqrt{g},$$

mit ihrer Volumenform ganz allgemein (und nicht etwa als die Standardmetrik) festgesetzt.

Das Vektorfeld hat die Gestalt

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x) \partial/\partial x_i,$$

und es gehört dazu ein lokaler Fluß , also in einer Umgebung U eines Punktes für ein Zeitintervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ eine Abbildung

$$\Phi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, \quad \Phi_t(x) := \Phi(x, t), \quad \Phi_0 = \mathrm{id}, \quad \dot{\Phi}_t = v \circ \Phi_t.$$

Wir berechnen die Ableitung der infinitesimalen Volumenausdehnung von Φ_t nach der Zeit für $t = 0$ und behaupten:

(5.3) Deutung der Divergenz.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Phi_t^* \omega - \omega}{t} = \mathrm{div}\, v \cdot \omega.$$

Beweis: In unseren lokalen Koordinaten ist der Koeffizient von $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ auf der linken Seite

$$(*) \qquad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} [\, \gamma \circ \Phi_t(x) \cdot \det D\Phi_t(x))\,] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} v_i + \gamma \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Hier bedachten wir $\Phi_0 = \mathrm{id}$, also $D\Phi_0 = 1$, und die Ableitung der Determinante haben wir in (II, 2.6) schon berechnet, und die **euklidische** Divergenz $\sum_{i=1}^n \partial v_i/\partial x_i$ gefunden.

Berechnen wir nun andererseits die oben definierte Divergenz in denselben lokalen Koordinaten:

$$\omega \lrcorner v = \sum_{i=1}^{n} (-)^{i+1} \gamma \cdot v_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

$$d(\omega \lrcorner v) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} v_i + \gamma \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n =: \mathrm{div}\, v \cdot \omega.$$

Also erhalten wir durch Vergleich mit der rechten Seite von $(*)$ die Behauptung. □

Unsere Deutung der Divergenz besagt für Tangentialvektoren $w_1, \ldots, w_n \in T_pM$:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_t^* \omega_p(w_1, \ldots, w_n) = \mathrm{div}_p v \cdot \omega_p(w_1, \ldots, w_n).$$

Ersetzt man p durch $q = \Phi_\tau(p)$ und w_ν durch $T_p\Phi_\tau(w_\nu)$, so besagt diese Deutung der Divergenz dasselbe wie der

(5.4) Satz von Liouville. *Sei v ein Vektorfeld auf M mit lokalem Fluß Φ und ω eine Volumenform. Sei* $\operatorname{div}(v) \cdot \omega := d(\omega \lrcorner v)$. *Dann genügt $\Phi_t^*\omega$ der linearen Differentialgleichung*

$$(\Phi_t^*\omega)^\cdot = \operatorname{div}(v) \circ \Phi_t \cdot \Phi_t^*\omega,$$

also explizit

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=\tau} \Phi_t^*\omega_q(w_1, \dots, w_n) = \operatorname{div}_q(v) \cdot \Phi_\tau^*\omega_q(w_1, \dots, w_n), \quad q = \Phi_\tau(p). \qquad \square$$

Nunmehr wenden wir uns der rechten Seite des Divergenzsatzes zu. Was bedeutet die Form $(\omega \lrcorner v)|\partial M$ geometrisch? Um das zu sehen, ordnen wir jedem Randpunkt $p \in \partial M$ den **kanonischen Normalvektor** $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(p) \in T_pM$ zu, mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle \mathfrak{n}, w\rangle = 0$ *für alle $w \in T_p\partial M$, also $\mathfrak{n}$ ist orthogonal zu ∂M.*
(ii) $|\mathfrak{n}| = 1$.
(iii) $\mathfrak{n}$ *zeigt nach außen.*

Letzteres heißt: Ist $(w_1, \dots, w_{n-1})$ eine positiv orientierte Basis von $T_p\partial M$, so ist $\omega(\mathfrak{n}, w_1, \dots, w_{n-1}) > 0$ für die kanonische Volumenform ω von M, also $(\mathfrak{n}, w_1, \dots, w_{n-1})$ ist eine positiv orientierte Basis von T_pM.

Mit diesen Festsetzungen gilt dann:

(5.5) Lemma. *Seien ω_M und $\omega_{\partial M}$ die kanonischen Volumenformen der Riemannschen Mannigfaltigkeiten M und ∂M. Dann gilt:*

$$(\omega_M \lrcorner v) \mid \partial M = \langle v, \mathfrak{n}\rangle \cdot \omega_{\partial M}.$$

Beweis: Sei $(w_1, \dots, w_{n-1})$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $T_p\partial M$. Dann ist $(\mathfrak{n}, w_1, \dots, w_{n-1})$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von T_pM. Wir stellen v als Linearkombination dieser Basis dar und erhalten:

$$v = \langle v, \mathfrak{n}\rangle \cdot \mathfrak{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i w_i,$$

$$(\omega_M \lrcorner v)(w_1, \dots, w_{n-1}) = \omega_M(v, w_1, \dots, w_{n-1}) = \langle v, \mathfrak{n}\rangle,$$

$$\langle v, \mathfrak{n}\rangle \cdot \omega_{\partial M}(w_1, \dots, w_{n-1}) = \langle v, \mathfrak{n}\rangle.$$

$\square$

Als Folgerung und Zusammenfassung ergibt sich jetzt unmittelbar:

(5.6) Divergenzsatz von Gauß . *Sei v ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit kompaktem Träger auf der berandeten orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Dann ist*

$$\int_M \operatorname{div} v = \int_{\partial M} \langle v, \mathfrak{n} \rangle.$$

Dabei ist $\mathfrak{n}$ der kanonische Normalvektor auf ∂M. □

Diese Integralformel hat tausend Anwendungen in der Analysis, aber es gibt auch kaum ein Gebiet der Physik, wo sie nicht auftritt. Auf dem $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik

$$\langle \partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j \rangle = \delta_{ij}$$

erhält man nach unseren Formeln den altvertrauten Ausdruck für die Divergenz

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{n} \partial v_i / \partial x_i.$$

Wir empfehlen den Divergenzsatz gleich durch eine Anwendung:

(5.7) Berechnung des Volumens der Sphäre. *Das Volumen der n-Sphäre ist*

$$\operatorname{vol}(S^n) = (n+1) \cdot \operatorname{vol}(D^{n+1}), \quad \textit{mit} \quad D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| \leq 1\}.$$

Beweis: Auf D^{n+1} sei der Ortsvektor x als Vektorfeld genommen, dann ist $\operatorname{div} x = n+1$, und auf $S^n = \partial D^{n+1}$ ist $x = \mathfrak{n}$. Also

$$(n+1) \cdot \operatorname{vol}(D^{n+1}) = \int_{D^{n+1}} \operatorname{div} x = \int_{S^n} \langle x, \mathfrak{n} \rangle = \int_{S^n} 1 = \operatorname{vol}(S^n).$$ □

Das Volumen des Balls D^{n+1} kennen wir ja (Bd. 2, IV, 4.11), und wir haben da schon dieses Ergebnis angedeutet.

Wie der Satz von Stokes eine Deutung der äußeren Ableitung gibt, geht aus dem Divergenzsatz auch eine geometrische Deutung der Divergenz hervor: Wir wählen eine n-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit, zum Beispiel eine kleine Kugel D um $p \in M$ und wissen

$$\int_D \operatorname{div} v = \int_{\partial D} \langle v, \mathfrak{n} \rangle.$$

Wir dividieren beide Seiten durch das Volumen $\mathrm{vol}(D) = \int_D 1$ und erhalten

$$(\int_D \mathrm{div}\, v)/\mathrm{vol}\, D = (\int_{\partial D} \langle v, \mathfrak{n}\rangle)/\mathrm{vol}\, D.$$

Fällt jetzt D in ein Kartengebiet, so daß man ohne weiteres vom Durchmesser $|D| = \sup\{|p-q| \, \big| p, q \in D\}$ reden kann, so ergibt sich leicht für $p \in D$:

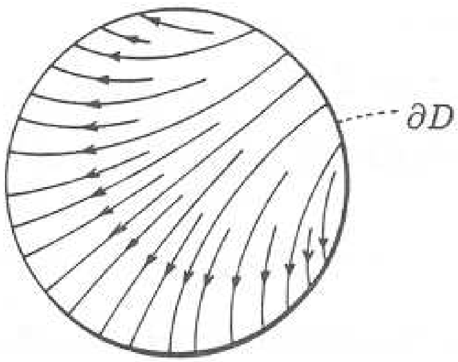
(5.8) $$\mathrm{div}_p v = \lim_{|D| \to 0} (\int_{\partial D} \langle v, \mathfrak{n}\rangle)/\mathrm{vol}\, D.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht nämlich in Koordinaten

$$(\int_D \mathrm{div}\, v \cdot \gamma(x) dx_1 \dots dx_n) / \int_D \gamma(x) dx_1 \dots dx_n,$$

was für $|D| \to 0$ offenbar gegen $\mathrm{div}_p v$ geht.

Wir stellen uns das Vektorfeld v durch seinen Fluß vor. Das Integral $\int_{\partial D} \langle v, \mathfrak{n}\rangle$ mißt, wieviel pro Zeit über den Rand von D in Normalrichtung nach außen strömt. Dies wird infinitesimal pro Volumen genommen, so daß die Divergenz eine Quellstärke ist (oder eine Sickerstärke, wenn sie negativ ausfällt). Der Divergenzsatz sagt also: Das Integral über die Quellstärke ist gleich dem, was (senkrecht gemessen) über den Rand fließt.



§ 6. Vektoranalysis

Trägt ein reeller Vektorraum V eine symmetrische nicht entartete Bilinearform

$$V \times V \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w\rangle,$$

so hat man einen induzierten Isomorphismus mit dem Dualraum

$$\kappa : V \to V^*, \quad v \mapsto \langle v, \ \rangle.$$

Sei jetzt $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V und

$$\langle e_i, e_j\rangle = g_{ij}.$$

Sei $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ die duale Basis von V^*. (Hier befolgen wir ausnahmsweise die vielbeliebte Konvention, durch die Position der Indexe die Varianz mitzuteilen. Im allgemeinen hätte das Befolgen dieser Indexkonventionen aber in diesem Büchlein wie zumeist mehr Mühe als Nutzen gebracht.) Dann ist

$$\kappa(e_i) = \sum_j g_{ij}\varepsilon^j \tag{6.1}$$

denn $\kappa e_i(e_k) = \langle e_i, e_k\rangle = g_{ik} = (\sum_j g_{ij}\varepsilon^j)(e_k)$. Bezeichnen wir mit (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix, so ist entsprechend (6.1)

$$\kappa^{-1}\varepsilon^i = \sum_j g^{ij} e_j.$$

Versieht man V^* so mit einem Skalarprodukt, daß κ isometrisch wird, so ist $\langle \varepsilon^i, \varepsilon^j\rangle = g^{ij}$, denn

$$\langle \varepsilon^i, \varepsilon^j\rangle = \langle \kappa^{-1}\varepsilon^i, \kappa^{-1}\varepsilon^j\rangle = \sum_{k,\ell} g^{ik} g^{j\ell}\langle e_k, e_\ell\rangle = \sum_{k,\ell} g^{ik} g^{j\ell} g_{k\ell} = \sum_k g^{ik}\delta^j_k = g^{ij}.$$

Wir denken natürlich an Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Die gegebene Metrik induziert hier den Isomorphismus

$$\kappa : T_pM \to T_pM^*,$$

und dadurch haben wir eine Entsprechung von Differentialformen und Vektorfeldern auf M. Es bezeichne ΓM den $C^\infty(M)$-Modul der Vektorfelder auf M. Dann induziert κ den ebenso bezeichneten Isomorphismus

$$\kappa : \Gamma M \xrightarrow{\cong} \Omega^1 M, \quad v \mapsto \langle v, \ \rangle,$$

der einem Vektorfeld v die Pfaffsche Form κv zuordnet, mit $(\kappa v)_p(w) = \langle v(p), w\rangle$ für $w \in T_pM$. Insbesondere ist

$$\kappa^{-1} df = \operatorname{grad} f$$

der **Gradient** von f. In lokalen Koordinaten $(x^1, \dots, x^n)$ ist $g_{ij}(x) = \langle \partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j\rangle$, und

$$\kappa^{-1} dx^i = \sum_j g^{ij}(x)\partial/\partial x^j,$$

also

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j} g^{ij}(x)\partial f/\partial x^i(x) \cdot \partial/\partial x^j. \tag{6.2}$$

Hat man natürlich auf $\mathbb{R}^n$ die Standardmetrik $g_{ij} = \delta_{ij}$, so ist

$$\operatorname{grad} f = \sum_j \partial f/\partial x^j \cdot \partial/\partial x^j$$

der Vektor mit den Komponenten $\partial f/\partial x^j$. So tritt es zumeist in $\mathbb{R}^3$ auf. In $\mathbb{R}^4$ jedoch betrachtet man gern die **Minkowski-Metrik**

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{Diagonalmatrix,}$$

welche durch die Relativitätstheorie begründet ist. Hier ist dann

$$\operatorname{grad}_4 f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z, -\partial f/\partial t),$$

für die Basis $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, \partial/\partial t)$ des Tangentialraumes. Überhaupt hängt der Gradient von der Metrik ab, und ist "in allgemeinen Koordinaten" durch (6.2) zu berechnen.

Ist M eine orientierte n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der kanonischen Volumenform ω, so haben wir auch die Isomorphismen

$$\begin{aligned} \omega \lrcorner : \Gamma M &\xrightarrow{\cong} \Omega^{n-1}M, & v &\mapsto \omega \lrcorner v, \\ \omega\cdot : C^\infty(M) &\to \Omega^n M, & f &\mapsto f\cdot\omega. \end{aligned} \tag{6.3}$$

In lokalen Koordinaten $(x^1, \dots, x^n)$ ist der erste durch

$$v = \sum_j v^j \partial/\partial x_j \mapsto \sqrt{g}\cdot \sum_j (-)^{j+1} v^j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n \tag{6.4}$$

gegeben. Im Dreidimensionalen mit Koordinaten (x, y, z) schreibt man das so:

$$\omega \lrcorner v = \sqrt{g}\cdot (v^1 dy\wedge dz + v^2 dz \wedge dx + v^3 dx \wedge dy).$$

In euklidischen Koordinaten ist $\sqrt{g} = 1$, und die drei Komponenten von v stehen wieder so da wie zuvor.

Im Folgenden sei nun M eine **dreidimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit**. Wir benutzen die Isomorphismen κ und $\omega\lrcorner$, um den Kalkül der äußeren Differentialformen als Kalkül der klassischen Vektoranalysis neu zu interpretieren. Wir gehen aus von dem kommutativen Diagramm:

(6.5)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, hook] & \Omega^0 M \arrow[r, "d"] & \Omega^1 M \arrow[r, "d"] & \Omega^2 M \arrow[r, "d"] & \Omega^3 M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, hook] \arrow[u, "="] & C^\infty M \arrow[r, "\operatorname{grad}"'] \arrow[u, "="] & \Gamma M \arrow[r, "\operatorname{rot}"'] \arrow[u, "\kappa"] & \Gamma M \arrow[r, "\operatorname{div}"'] \arrow[u, "\omega\lrcorner"] & C^\infty M \arrow[r] \arrow[u, "\omega\cdot"] & 0
\end{tikzcd}$$

Die untere Zeile ist durch die Kommutativität des Diagramms und die obere definiert. Was oben immer dieselbe Formel ist, erscheint unten in bunter Vielfalt. So wird aus $d\circ d = 0$ durch Übersetzung in die untere Zeile:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} f = 0. \tag{6.6}$$

Das Lemma von Poincaré sagt für eine zusammenziehbare Mannigfaltigkeit umgekehrt: Ist $\operatorname{rot} v = 0$, so ist $v = \operatorname{grad} f$ für eine Funktion f, also das Vektorfeld hat ein Potential, und ist $\operatorname{div} v = 0$, so ist $v = \operatorname{rot} w$ für ein Vektorfeld w. Die Verwandlung des Satzes von Stokes zum Divergenzsatz von Gauß

$$\int_M \operatorname{div} v = \int_{\partial M} \langle v, \mathfrak{n}\rangle$$

haben wir schon besprochen.

Sei N eine zweidimensionale berandete orientierte Untermannigfaltigkeit von M. Dann sagt der Satz von Stokes für ein Vektorfeld v mit kompaktem Träger:

$$\int_N \omega_M \lrcorner \operatorname{rot} v = \int_{\partial N} \kappa v. \tag{6.7}$$

Ist $\mathfrak{t}$ das Feld von Tangentialvektoren von ∂N der Länge 1 und positiver Orientierung, so ist

$$\kappa v \mid \partial N = \langle v, \mathfrak{t} \rangle \cdot \omega_{\partial N},$$

denn $\kappa v(\mathfrak{t}) = \langle v, \mathfrak{t} \rangle$, also beide Seiten stimmen auf dem Basisvektor $\mathfrak{t}$ überein. Die linke Seite von (6.6) haben wir schon für den Divergenzsatz gedeutet: Wir ordnen jedem $p \in N$ einen **kanonischen Normalvektor** $\mathfrak{n}(p)$ so zu, daß gilt:

(i) $\langle \mathfrak{n}(p), w \rangle = 0$ für alle $w \in T_pN$.
(ii) $|\mathfrak{n}| = 1$.
(iii) Für eine positiv orientierte Basis (w_1, w_2) von T_pN ist $\omega(\mathfrak{n}(p), w_1, w_2) > 0$.

Dann ist

$$(\omega \lrcorner w)|N = \langle \mathfrak{n}, w \rangle \cdot \omega_N.$$

Setzen wir dies in (6.6) ein, so entsteht der klassische

(6.8) Rotationssatz. *Sei N eine zweidimensionale orientierte kompakte berandete Untermannigfaltigkeit von M und v ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf M. Dann ist*

$$\int_N \langle \operatorname{rot} v, \mathfrak{n} \rangle = \int_{\partial N} \langle v, \mathfrak{t} \rangle.$$

$\mathfrak{n} =$ *kanonische Normalfeld von* N, $\mathfrak{t} =$ *positives Einheitstangentialfeld von* ∂N. ☐

Diese Versionen des Divergenz- und Rotationssatzes dienen vor allem der geometrischen Deutung der Integralformeln. Für die Berechnung ist die ursprüngliche Fassung (6.7) und (5.2) besser geeignet. Die Integranden sind da unmittelbar in Koordinaten anzugeben, und die Berechnung der Normal- und Tangentialfelder und der Volumenform ω_N ist überflüssig. Nur wenn eine speziell gewählte besonders einfache geometrische Situation all diese Größen unmittelbar abzulesen gestattet, empfiehlt sich auch zur Rechnung die letzte Version des Rotationssatzes.

Das Diagramm (6.5) liefert Isomorphismen, die man mit einem $*$ bezeichnet,

$$\Omega^1 M \overset{*}{\leftrightarrow} \Omega^2 M \quad \text{und} \quad \Omega^0 M \leftrightarrow \Omega^3 M.$$

In euklidischen Koordinaten auf $M = \mathbb{R}^3$ ist

$$*\,\varepsilon^1 = \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3, \quad *\,\varepsilon^2 = \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1, \quad *\,\varepsilon^3 = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2.$$

Sie heißen **Sternoperatoren**. Wir nehmen sie als zusätzliche Struktur zum de Rham-Komplex hinzu. Dann können wir die Formeln der klassischen Vektoranalysis durch Übersetzung aus dem Kalkül der alternierenden Differentialformen gewinnen.

Man kann das Skalarprodukt von Vektorfeldern beschreiben durch

$$\langle v, w\rangle = *(\kappa(v) \wedge *\kappa(w)). \tag{6.9}$$

Beweis: Wähle Orthonormalbasen (e_1, e_2, e_3) von T_pM und $(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3)$ dual so, daß $w = w^1 e_1$. Dann ergibt sich

$$*(\kappa(v) \wedge *\kappa(w)) = *(\kappa(v) \wedge \omega \lrcorner\, w) = *(w^1 \cdot \kappa(v) \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) = *(v^1 w^1 \cdot \omega) = v^1 w^1 = \langle v, w\rangle.$$

□

Der **Laplaceoperator** ist in unserer Situation definiert durch

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = *d * df.$$

Man hat auch einen Laplaceoperator

$$\Delta = (d * d * - * d * d) : \Omega^1 M \to \Omega^1 M$$

und definiert damit den **vektoriellen Laplaceoperator**

$$\vec{\Delta} = \kappa^{-1} \circ \Delta \circ \kappa : \Gamma M \to \Gamma M.$$

Man rechnet unschwer nach, daß dieser in euklidischen Koordinaten auf $\mathbb{R}^3$ dadurch gegeben ist, daß man komponentenweise den Laplaceoperator anwendet.

Das **Kreuzprodukt** von Vektorfeldern ist durch die Kommutativität des folgenden Diagramms definiert:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1 M \times \Omega^1 M \arrow[r, "\wedge"] & \Omega^2 M \\
\Gamma M \times \Gamma M \arrow[u, "\kappa \times \kappa"] \arrow[r, "\times"] & \Gamma M. \arrow[u, "\omega \lrcorner"']
\end{tikzcd}$$

Einige Beispiele für die Übersetzung: Für $f \in \Omega^0 M$, $\alpha \in \Omega^1 M$:

$$\begin{aligned} d(f \cdot \alpha) &= df \wedge \alpha + f \cdot d\alpha, \\ \operatorname{rot}(f \cdot v) &= \operatorname{grad} f \times v + f \cdot \operatorname{rot} v. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Und für $f \in \Omega^0 M$, $\alpha \in \Omega^2 M$ liefert dieselbe Formel

$$\operatorname{div}(f \cdot v) = \langle \operatorname{grad} f, v\rangle + f \cdot \operatorname{div} v. \tag{6.11}$$

Setzt man hier $v = \operatorname{grad} g$ ein, so erhält man

$$\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{grad} g) = \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle + f \cdot \Delta g. \tag{6.12}$$

Vertauscht man hier f und g und subtrahiert beide Gleichungen, so entsteht

$$\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{grad} g - g \cdot \operatorname{grad} f) = f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f.$$

Aus dem Divergenzsatz folgt daher:

(6.13) Greensche Formel. *Hat die Funktion f oder g kompakten Träger, so gilt:*

$$\int_M (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f) = \int_{\partial M} \langle f \cdot \operatorname{grad} g - g \cdot \operatorname{grad} f, \mathfrak{n} \rangle. \qquad \square$$

Ist zum Beispiel g eine Testfunktion, die auf dem Rand ∂M von zweiter Ordnung verschwindet, also $g|\partial M = dg|\partial M = 0$, so ergibt sich

$$\int_M f \cdot \Delta g = \int_M g \cdot \Delta f.$$

Erklären wir allgemein ein Skalarprodukt auf dem Raum der C^2-Funktionen auf M mit kompaktem Träger im Inneren von M durch

$$\langle f, g \rangle := \int_M f \cdot g,$$

so liefert die Greensche Formel also

$$\langle f, \Delta g \rangle = \langle g, \Delta f \rangle.$$

Das besagt, daß Δ auf einem geeigneten Raum von Funktionen ein selbstadjungierter Operator ist.

Weitere Übersetzungen: Für Funktionen f und g auf M hat man

(6.14)
$$\begin{aligned} d(f \cdot g) &= g \cdot df + f \cdot dg, \\ \operatorname{grad}(f \cdot g) &= g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g. \end{aligned}$$

Man wendet $*$ an und leitet noch einmal ab, dann folgt

(6.15)
$$\begin{aligned} d * d(f \cdot g) &= dg \wedge *df + df \wedge *dg + g \cdot d * df + f \cdot d * dg, \\ \Delta(f \cdot g) &= 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle + g \cdot \Delta f + f \cdot \Delta g. \end{aligned}$$

Ist $\alpha = \kappa(v) \in \Omega^1 M$, also $d\alpha = *\kappa(\operatorname{rot} v)$, so ergibt sich

(6.16)
$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta, \\ \operatorname{div}(v \times w) &= \langle \operatorname{rot} v, w \rangle - \langle v, \operatorname{rot} w \rangle. \end{aligned}$$

Die triviale Identität

$$d(*d*) = (*d)(*d) + (d * d * - * d * d)$$

verwandelt sich durch Transformation mit κ in die edle Formel

$$\text{grad div } v = \text{rot rot } v + \vec{\Delta} v. \tag{6.17}$$

Den Sternoperator und damit den Laplaceoperator $\Delta = \text{div grad}$ hat man für orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension. Die Metrik braucht auch nicht definit zu sein, solange sie nur nicht entartet ist. Für die Minkowski-Metrik auf $\mathbb{R}^4$ bleibt die kanonische Volumenform ungeändert die Standard-Determinante, aber der Gradient ändert sich, und

$$\text{div}_4 \text{ grad}_4 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

ist der Wellenoperator.

Man sieht, was alles im Komplex der alternierenden Differentialformen steckt. Die Eleganz und Durchsichtigkeit des Kalküls ist auch im Dreidimensionalen nicht durch Verlust des klassischen Inhalts erkauft.

Gelegentlich hat man auch Anlaß , die Vektoranalysis im Zweidimensionalen anzuwenden. Man gewinnt die nötigen Aussagen aus dem für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten Vorgeführten folgendermaßen:

Sei N eine zweidimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, eine Fläche. Dann trägt $M := N \times \mathbb{R}$ als dreidimensionale Mannigfaltigkeit auch eine Riemannsche Metrik, die Produktmetrik von N und $\mathbb{R}$, denn es ist

$$T_{(p,t)}M = T_{(p,t)}(N \times \mathbb{R}) = T_pN \times T_t\,\mathbb{R}.$$

Auch erweitern wir Funktionen $f : N \to \mathbb{R}$ oder Vektorfelder auf N zu Funktionen und Vektorfeldern auf $N \times \mathbb{R}$, die wir mit gleichem Buchstaben bezeichnen, durch

$$f(p,t) := f(p) \quad \text{und} \quad v(p,t) = (v(p), 0).$$

Die Tangentialvektoren auf $N \times \mathbb{R}$ sind dabei entsprechend obiger Produktzerlegung in Komponenten aus T_pN und $T_t\,\mathbb{R}$ dargestellt.

So haben wir also kanonische Einbettungen

$$C^\infty(N) \to C^\infty(N \times \mathbb{R}), \quad \Gamma(N) \to \Gamma(N \times \mathbb{R}),$$

wenn wir mit Γ wieder den jeweiligen Raum der Vektorfelder bezeichnen. Nun beachte man, daß der Gradient von $N \times \mathbb{R}$ bei diesen Konventionen sich zu einer Abbildung

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(N) \arrow[r, "\text{grad}"'] \arrow[d, hook] & \Gamma(N) \arrow[d, hook] \\
C^\infty(N \times \mathbb{R}) \arrow[r, "\text{grad}"'] & \Gamma(N \times \mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

einschränkt, und ganz analog durch Einschränkung entsprechender Operatoren auf $N \times \mathbb{R}$ erhält man die Divergenz

$$\mathrm{div} : \Gamma(N) \to C^\infty(N).$$

Die Rotation $\mathrm{rot} : \Gamma(N \times \mathbb{R}) \to \Gamma(N \times \mathbb{R})$ bildet den Unterraum $\Gamma(N)$ in den Raum der Vektorfelder ab, deren N-Komponente verschwindet, die also nur eine allenfalls nicht triviale $\mathbb{R}$-Komponente haben. Einem Vektorfeld $v \in \Gamma(N)$ entspricht nämlich unter κ eine Pfaffsche Form $\mathrm{pr}^*\alpha$, wenn $\mathrm{pr} : N \times \mathbb{R} \to N$ die Projektion ist. Diese Form hat den Korand $\mathrm{pr}^* d\alpha = \varphi \cdot \mathrm{pr}^*\omega_N = \omega_M \lrcorner (0, \varphi)$, mit $M = N \times \mathbb{R}$ und $\varphi \in C^\infty(N)$.

Also $\mathrm{rot}(v) = (0, \varphi)$, wofür man denn, wenn man von vornherein auf Flächen bleibt, gleich $\mathrm{rot}(v) = \varphi$ schreibt. Somit liefert die Rotation durch Einschränkung auf $\Gamma(N)$ hier einen Operator

$$\mathrm{rot} : \Gamma(N) \to C^\infty(N).$$

So wird der Leser mühelos aus dem Dreidimensionalen ins Zweidimensionale absteigen, wie ja auch in physikalischen Anwendungen die betrachteten Flächen meist in den Raum eingebettet sind.