Die Kapitel I - IV der Vorlesung enthielten Auszüge aus meinen Büchern Analysis II und Analysis III, die man vollständig im Netz findet. Ich gebe daher nur ein Skriptum von Kapitel V und Kapitel VI der Vorlesung für Physiker.

V. Kapitel

Globale Analysis

1. Alternierende Differentialformen auf $G \subset \mathbb{R}^3$

Transformiert man einen Integranden $f : G \to \mathbb{R}$ durch Transformation des Definitionsgebiets $\varphi : U \xrightarrow{\cong} G$, so ist der Integrand durch

$$f \mapsto (f \circ \varphi) \cdot \det(D\varphi) \tag{1.1}$$

zu ersetzen, nämlich

$$\int\limits_G f \;=\; \int\limits_U (f \circ \varphi) \cdot \det(D\varphi),$$

falls $\det(D\varphi) > 0$. Nun ist der Betrag $|\det(D\varphi)|$ algebraisch nicht gut zu haben, und es ist im Folgenden wichtig, wie beim Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im Eindimensionalen, die Orientierung mit zu beachten und Größen zu betrachten, die sich allgemein und für beliebiges φ nach Formel (1.1) transformieren. Auch wollen wir in $\mathbb{R}^3$ nachher nicht nur über Gebiete G integrieren, sondern auch über Flächen und Kurven. Wir wollen also auch Größen erklären, die man etwa als eine Flussdichte interpretieren kann, und deren Integral über eine Fläche jeweils sagt, wieviel pro Zeiteinheit durch die Fläche in „positiver Richtung" fließt. Solche Größen sind Differentialformen. Das wollen wir jetzt erklären:

Sei G offen in $\mathbb{R}^3$. Wir haben auf G die drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 und ihre Differentiale dx_1, dx_2, dx_3. Wir bilden damit formale Linearkombinationen

$$\alpha \;=\; a_1(x)\,dx_1 + a_2(x)\,dx_2 + a_3(x)\,dx_3 \tag{1.2}$$

mit genügend oft differenzierbaren Funktionen a_j auf G. Ein solcher Ausdruck heisst eine **Pfaffsche Form**.

Beispiel: Für $f : G \to \mathbb{R}$ ist $df = \sum_i \partial f/\partial x_i(x)\,dx_i$ eine Pfaffsche Form, das Differential von f, aber nicht jede Pfaffsche Form ist ein Differential, wie wir bald sehen. Wir schreiben formal $a = (a_1, a_2, a_3)$ als Zeilenvektor und $ds = {}^t(dx_1, dx_2, dx_3)$ als Spalte, dann ist $\alpha = a \cdot ds$.

Jetzt bilden wir für Pfaffsche Formen

$$\alpha \;=\; a \cdot ds, \quad \delta \;=\; d \cdot ds$$

ein **Dachprodukt** $\alpha \wedge \delta$, von dem wir fordern, dass es bilinear für die Funktionenkoeffizienten und alternierend ist, also $dx_i \wedge dx_j \;=\; -dx_j \wedge dx_i$. Es ergibt sich, eine leichte Rechnung: $\alpha \wedge \delta = (a_2 d_3 - d_2 a_3)\, dx_2 \wedge dx_3 + (a_3 d_1 - d_3 a_1)\, dx_3 \wedge dx_1 + (a_1 d_2 - d_1 a_2)\, dx_1 \wedge dx_2$. Wir fassen auch diese Ausdrücke $dx_i \wedge dx_j$ zu einer Spalte und die Koeffizienten zu einer Zeile zusammen und haben:

$$\begin{aligned} b &= (b_1, b_2, b_3) = a \times d \quad \text{und} \\ dF &= \begin{bmatrix} dx_2 \wedge dx_3 \\ dx_3 \wedge dx_1 \\ dx_1 \wedge dx_2 \end{bmatrix}, \quad \alpha \wedge \delta = b \cdot dF\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

So ein Ausdruck $b \cdot dF$ allgemein heisst eine **alternierende Zweiform**. Schließlich können wir auch das Produkt $\alpha \wedge \delta \wedge \rho$ mit $\rho = r_1\, dx_1 + r_2\, dx_2 + r_3\, dx_3 \;=\; r \cdot ds$ bilden, mit der Maßgabe, dass das Produkt linear in den drei Faktoren (an jeder Stelle $x \in G$) und alternierend sein soll, und dann erhält man unmittelbar aus der Definition der Determinante oder durch Nachrechnen:

$$\alpha \wedge \delta \wedge \rho \;=\; \det(a, d, r) \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \tag{1.4}$$

Wir setzen $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \;=:\; dV$ und haben einen Ausdruck der Form $\gamma \;=\; g(x) \cdot dV$, und sowas heisst eine **alternierende** 3**-Form** auf G. Die Dachprodukte der dx_i bleiben dabei vorerst formale Buchstabenfolgen, die wir erst nach und nach interpretieren, aber jedenfalls ist in Rechnungen stets $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ zu setzen. Übrigens, wenn $\beta = b \cdot dF$ und $\rho = r \cdot ds$, so $\beta \wedge \rho = \langle b, r\rangle dV$, was ja für $\beta = \alpha \wedge \rho = (a \times d) dF$ mit $\langle a \times d, \rho\rangle = \det(a, d, \rho)$ zusammenstimmt. Wir haben also folgende Differentialformen

(1.5)

Grad		Name
0	$f : G \to \mathbb{R}$	Funktion
1	$\alpha = a \cdot ds = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3$	PfaffscheForm
2	$\beta = b \cdot dF = b_1\, dx_2 \wedge dx_3 + b_2\, dx_3 \wedge dx_1 + b_3\, dx_1 \wedge dx_2$	Zweiform
3	$\gamma = g \cdot dV = g(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$	Dreiform

Und wir haben für solche Formen das Dachprodukt $\varphi \wedge \psi$ vom Grad $i+j$ falls $i = \text{Grad}(\varphi)$, $j = \text{Grad}(\psi)$. In der Dimension 2, also für $G \subset \mathbb{R}^2$, entfallen schon die 3-Formen, weil ja in $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ ein Index doppelt auftritt, und dann ergibt sich 0 wegen $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. In der Dimension 1 gibt es nur noch Pfaffsche Formen, nämlich $a(t)\, dt$, wenn die einzige Koordinate t heisst.

Es bezeichne $\Omega^j = \Omega^j(G)$ den Vektorraum der alternierenden j-Formen, d.h. Differentialformen vom Grad j nach Tabelle (1.5). Dabei sei $G \subset \mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}$ offen. Man hat dann die

(1.6) **Äussere Ableitung** $d : \Omega^j(G) \to \Omega^{j+1}(G)$.

Sie wird gebildet, indem man die Koeffizientenfunktionen f, a_j, b_j, g in (1.5) jeweils durch

$$\sum_k \partial a_j/\partial x_k \cdot dx_k \wedge \ldots$$

also ihr Differential ersetzt, und das entstehende Dachprodukt dann wie gehabt ausrechnet.
Hinreichende Differenzierbarkeit der Funktionen wollen wir immer voraussetzen. Explizit: So entsteht aus der obigen Pfaffschen Form $\alpha = a \cdot ds$ die 2-Form

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{j,k} \tfrac{\partial a_j}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_j, \text{ und aus } \beta \\ d\beta &= \big(\sum_k \tfrac{\partial b_k}{\partial x_k}\big)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \operatorname{div} b \cdot dV \end{aligned} \tag{1.7}$$

Ordnet man in $d\alpha$ wieder durch $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ nach Komponenten von dF, so findet man

$$d\alpha \;=\; \begin{bmatrix} \partial a_3/\partial x_2 - \partial a_2/\partial x_3 \\ \partial a_1/\partial x_3 - \partial a_3/\partial x_1 \\ \partial a_2/\partial x_1 - \partial a_1/\partial x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_2 \wedge dx_3 \\ dx_3 \wedge dx_1 \\ dx_1 \wedge dx_2 \end{bmatrix} =: \operatorname{rot}(a) \cdot dF$$

Die Ableitung einer Funktion (0-Form) f ist $df = \sum_k \partial f/\partial x_k\, dx_k$, das Differential, und die Ableitung einer 3-Form ist 0.

(1.8) **Lemma.** $d \circ d = 0$.

Beweis. Beim Ableiten liefert ein Koeffizient $b(x)$ einer Form zunächst den Faktor
$\sum_j \partial b/\partial x_j\, dx_j \wedge \ldots$ und leitet man nochmal ab, so erhält man daraus $\sum_{j,k} \frac{\partial^2 b}{\partial x_j \partial x_k} dx_k \wedge dx_j \wedge \ldots$. Weil aber $\partial^2 b/\partial x_j \partial x_k = \partial^2 b/\partial x_k \partial x_j$ und $dx_k \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_k$, ist das Ergebnis 0. □

Bezeichnen wir noch mit $\mathbb{R}$ die konstanten Funktionen in Ω^0, und mit Γ den Raum der Vektorfelder jeweils auf G, so haben wir

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, hook, "d"] \arrow[d, equal] & \Omega^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \Omega^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & \Omega^2 \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & \Omega^3 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, hook] & C^\infty \arrow[r, "\operatorname{grad}"] & \Gamma \arrow[r, "\operatorname{rot}"] & \Gamma \arrow[r, "\operatorname{div}"] & C^\infty \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

Mit den Isomorphismen: $a \mapsto {}^t a \cdot ds, b \mapsto {}^t b \cdot dF, g \mapsto g \cdot dV$. Also sagt (1.8):

$$(1.10) \qquad \mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} \;=\; 0, \quad \mathrm{div} \circ \mathrm{rot} \;=\; 0.$$

Man kann nicht allgemein zurückschließen: Aus $d\varphi = 0$ folgt nicht allgemein $\varphi = d\psi$ für eine Form ψ. Ist $df = 0$, so muss f nur konstant sein, wenn das Gebiet zusammenhängt. In $(\mathbb{R}^2 - 0) \times \mathbb{R} = 0$ hat man den Winkel φ der Zylinderkoordinaten. Er ist keine wohldefinierte Funktion, nur bis auf eine additive Konstante $2\pi n$, aber die Pfaffsche Form $d\varphi = \alpha$ ist wohldefiniert mit $d\alpha = 0$. Sie ist ungleich df für Funktionen f, wie wir auch am Integral noch sehen werden. Ist aber das Gebiet **sternförmig**, so ist der Schluss $d\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = d\psi$ richtig. G heisst sternförmig mit Zentrum $z \in G$ wenn für jedes $u \in G$ die Strecke $\{tz + (1-t)u \mid 0 \leq t \leq 1\}$ ganz in G liegt.

Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig mit oBdA Zentrum 0 und $f : G \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion mit $f(0) = 0$, so ist

$$f(x) \;=\; \int_0^1 d/dt f(tx)\, dt \;=\; \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 \partial_j f(tx)\, dt.$$

Auch ist $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$. Daraus entnehmen wir den Hinweis für:

(1.11) **Lemma.** *Sei* $\alpha = \sum_{j=1}^n v_j(x) dx_j$ *und* $\partial_i v_j = \partial_j v_i$ *für alle* i, j *(d.h.* $d\alpha = 0$*). Dann ist* $\alpha = df$ *für die Funktion*

$$f(x) \;=\; \sum_{j=1}^n x_j \cdot \int_0^1 v_j(tx)\, dt.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\partial f / \partial x_k &= \sum_j x_j \cdot \int_0^1 \partial_k v_j(tx) t\, dt + \underbrace{\int_0^1 v_k(tx)\, dt}_{(*)} \\
&= \int_0^1 t \cdot \sum_j \partial_j v_k(tx) x_j\, dt + (*) \text{ wegen } \partial_j v_k = \partial_k v_j \\
&= \int_0^1 t \tfrac{d}{dt} v_k(tx)\, dt + (*) \;=\; (\text{wegen } \tfrac{d}{dt}(t v_k) = t \tfrac{d}{dt} v_k + v_k) \\
& \int_0^1 \tfrac{d}{dt}\big(t v_k(tx)\big) dt - \int_0^1 \underbrace{v_k(tx) dt}_{(*)} + (*) \\
&= \big[t v_k(tx)\big]_0^1 = v_k(x).
\end{aligned}$$

□

Zusammen haben wir demnach:

(1.12) **Satz.** *Sei G offen und sternförmig in $\mathbb{R}^n$ und $\alpha = \sum_j v_j dx_j$ eine Pfaffsche Form auf G. Dann ist $\alpha = df$ für eine C^2-Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ genau dann wenn $d\alpha = 0$. Anders gesagt: Ein Vektorfeld a erfüllt $a = \operatorname{grad} f$, genau wenn*
$\operatorname{rot} a := (\partial_i a_j - \partial_j a_i \mid i, j = 1, \ldots, n) = 0$. □

Wir haben eine ähnliche Aussage für die zweite Stelle im Diagramm (1.6) nämlich:

(1.13) **Satz.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig oBdA mit Zentrum 0 und w ein Vektorfeld auf G mit $\operatorname{div}(w) = 0$. Dann ist $w = rot(v)$, mit*

$$v(x) \;=\; \Big(\int\limits_0^1 tw(tx)\,dt\Big) \times x.$$

Beweis: nachrechnen, Aufgabe. □

2. Transformation und Integration

Differentialformen kann man in jeder Dimension analog bilden. Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, Koordinaten (x_1, x_2), so hat man die alternierenden Differentialformen:

Grad		
0	$f : G \to \mathbb{R}$	Funktion
1	$\alpha_1(x)\,dx_1 + a_2(x)\,dx_2$	PfaffscheForm
2	$g(x)\,dx_1 \wedge dx_2$	Flächenform

Auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}$ bleiben nur Funktionen und die Pfaffschen Formen $a(x)dx$ und auf $\mathbb{R}^0$ nur konstante Funktionen. Bei uns sei stets die Dimension $m \leq 3$.

Für eine (hinreichend differenzierbare) Abbildung $\varphi : U \to G$ hat man die **induzierte Transformation** φ^* der Differentialformen, in Koordinaten x_i von G und u_j von U gegeben durch

$$(2.1) \qquad \varphi^* :\ \Omega^k(G) \;\to\; \Omega^k(U),\ f \mapsto f \circ \varphi,\ dx_i \mapsto \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\,du_j.$$

Dabei ist $\partial x_i/\partial u_j := \partial\big(x_i(\varphi(u)\big)/\partial u_j = \partial\varphi_i/\partial u_j$. Man hat also alle Funktionen $f, a_i, \ldots$ durch $f \circ \varphi, a_i \circ \varphi, \ldots$ zu ersetzen und jedes dx_i durch $\sum_j \partial x_i/\partial u_j\,du_j$, und wieder alles multilinear und alternierend auszurechnen. Die Transformation kann man auch so zusammenfassen:

$$(2.2) \qquad \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \partial x_i/\partial u_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_k \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \dim G = m \\ \dim U = k. \end{matrix}$$

Man sieht mit der Kettenregel: Hat man noch eine Transformation $\psi : V \to U$, Koordinaten ${}^t(v_1, \dots, v_\ell)$ von V, so ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix} \overset{\varphi^*}{=} \begin{bmatrix} \partial x_i/\partial u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_k \end{bmatrix} \overset{\psi^*}{=} \begin{bmatrix} \partial x_i/\partial u_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial u_j/\partial v_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv_1 \\ \vdots \\ dv_\ell \end{bmatrix}.$$

Das Matrizenprodukt ist $D(\varphi \circ \psi)$ nach der Kettenregel, also

$$(\varphi \circ \psi)^* \; = \; \psi^* \circ \varphi^*. \tag{2.3}$$

Beachte: $\varphi^* : \Omega^* G \to \Omega^* U$ ist kontravariant, geht also andersherum wie die Abbildung von Tangentialvektoren $T\varphi : T_p U \to T_{\varphi(p)} G$.

Zwei Beispiele wollen wir explizit angeben:
Seien U, G offen in $\mathbb{R}^3$ und $\varphi : U \to G$, $u \mapsto x(u)$ gegeben mit Jacobimatrix $D\varphi = \big(a_{ij}(u)\big)$. Dann transformiert man die 3-Form $g \cdot dV$ mit φ^*, indem man $g(x)$ durch $g\big(x(u)\big)$ ersetzt, und jedes dx_i durch $\sum_j a_{ij} \cdot du_j$, und dann alles bilinear alternierend ausrechnet. Man hat also das Dachprodukt $(\sum_j a_{1j} du_j) \wedge (\sum_j a_{2j} du_j) \wedge (\sum_j a_{3j} du_j)$ zu bestimmen, und das haben wir schon gemacht (1.4), wegen $(a_{ij}) = D\varphi$ ergibt sich

$$\varphi^*(g \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \; = \; (g \circ \varphi) \cdot \det(D\varphi) \cdot du_1 \wedge du_2 \wedge du_3. \tag{2.4}$$

Das sagt, dass sich 3-Formen hier wie Integranden transformieren, **solange** $\det D\varphi > 0$. Eine kürzere Rechnung lehrt das selbe in kleineren (und allen) Dimensionen. Für uns wichtig ist noch der Fall $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1(u_1,u_2) \\ x_2(u_1,u_2) \\ x_3(u_1,u_2) \end{bmatrix}$:

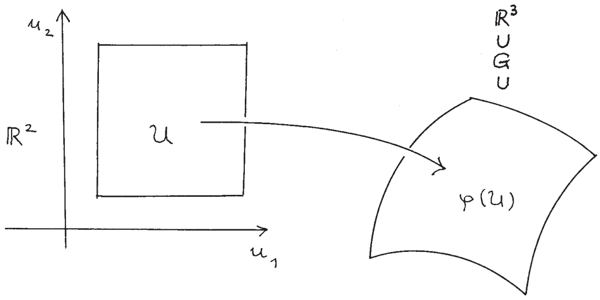
(2.5)

$$\varphi^*(b \cdot dF) \; =$$

$$\Big(b_1\big(x(u)\big)\big|\tfrac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u_1,u_2)}\big| \; + \; b_2\big(x(u)\big)\big|\tfrac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u_1,u_2)}\big| \; + \; b_3\big(x(u)\big)\big|\tfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u_1,u_2)}\big|\Big)\, du_1 \wedge du_2,$$

$$\text{mit } \tfrac{\partial(x_i,x_j)}{\partial(u_1,u_2)} \; = \; \begin{pmatrix} \partial x_i/\partial u_1 & \partial x_i/\partial u_2 \\ \partial x_j/\partial u_1 & \partial x_j/\partial u_2 \end{pmatrix} \text{ und } \; |\dots| \; = \; \det(\dots).$$

Dieser Fall interessiert uns aus folgendem Grund: Sei $\beta = b \cdot dF$ eine 2-Form auf $G \subset \mathbb{R}^3$ und U offen in $\mathbb{R}^2$ und $\varphi : U \to G$ gegeben. Dann ist $\varphi^*\beta$ eine 2-Form auf U, also von der Gestalt $\varphi^*\beta = g(u) \cdot du_1 \wedge du_2$. Sie hängt natürlich nur von $\beta \mid \varphi(U)$ ab. Ist nun g integrabel, so können wir $\int_{\varphi(U)} \beta := \int_U \varphi^*\beta := \int_U g(u)\, du_1\, du_2$ bilden (definieren).



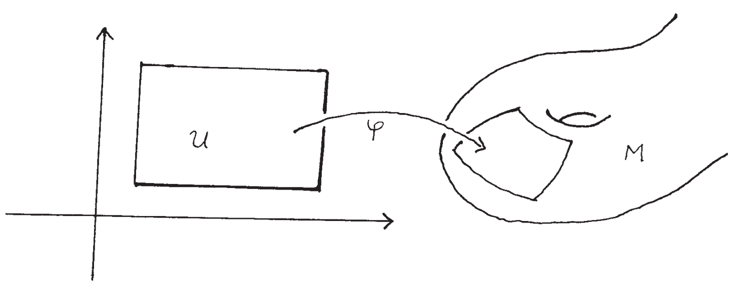
Hängt das von der Parametrisierung φ des Flächenstücks $\varphi(U) \subset G$ ab? In folgendem Sinne **nicht**: Wählen wir eine Umparametrisierung $\psi : V \xrightarrow{\cong} U$ mit **positiver** Jacobideterminante, so ist wie gesagt: $(\varphi \circ \psi)^*\beta = \psi^*(\varphi^*\beta) = \psi^*\big(g(u)du_1 \wedge du_2\big) = g\big(u(v)\big)\det(D\psi)\, dv_1 \wedge dv_2$, und es ist:

$$\int\limits_U g(u)\, du_1\, du_2 \;=\; \int\limits_V g\big(u(v)\big) \cdot \det(D\psi) \cdot dv_1\, dv_2. \tag{2.6}$$

Etwas pauschal gesagt: Eine 2-Form auf G ist eine Größe, die man über „Flächenstücke mit Parametrisierung" $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset U \to G$ integrieren kann (eine Fluss-Dichte), und dies Integral ändert sich bei Umparametrisierung nicht, **falls** der Parameterwechsel positive Jacobi-Determinante hat. Bei Ändern der Orientierung wird ein Vorzeichen (-1) aufgenommen! (gerichtete Flussdichte).

Wir denken bei solchen „parametrisierten Fächenstücken" natürlich an Karten einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$, einer **Fläche** in $\mathbb{R}^3$. Es sei M kompakt und **orientiert**. Letzteres heisst: Wir haben einen Atlas $\mathfrak{A}$ von M, dessen sämtliche Kartenwechsel positive Jacobideterminante haben, ausgezeichnet. Von einer inversen Karte (lokalen Parametrisierung, Koordinatensystem) $\varphi : U \to M$, die vielleicht nicht zu $\mathfrak{A}$ gehört, können wir dann sagen:

φ ist **positiv** oder **orientierungserhaltend**, wenn die Kartenwechsel von φ mit allen Karten aus $\mathfrak{A}$ stets positive Jacobideterminante haben.



Sei nun β eine 2-Form auf M, also etwa $\beta = b(x) \cdot dF$, wobei das Feld b auf einer Umgebung von M definiert ist. Der **Träger** $\mathrm{Tr}(\beta)$ von β ist der Abschluss der Menge $\{x \in M \mid b(x) \neq 0\}$. Wir wollen β über M integrieren, also

$$\int_M \beta \;=\; \int_M b(x)\,dF$$

erklären. Ganz leicht: Liegt $\mathrm{Tr}(\beta)$ im Gebiet $\varphi(U)$ einer Karte φ wie oben, so sei

$$\int_M \beta \;=\; \int_{\varphi(U)} b(x)\,dF \;:=\; \int_U \varphi^*\big(b(x)\,dF\big).$$

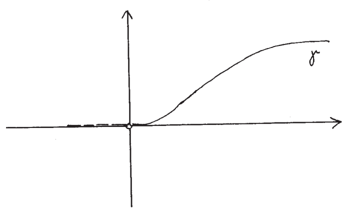
Im Allgemeinen kann man β als Summe von solchen Formen schreiben, die ihren Träger in einem Kartengebiet haben, und für $\beta = \sum_j \beta_j$ setze dann $\int_M \beta = \sum_j \int_M \beta_j$. Diesen letzten Schritt wollen wir noch etwas genauer betrachten.

Definition. Eine **Zerlegung** (Partition) **der Eins** auf M ist ein n-Tupel von Funktionen $\lambda_j : M \to [0,1]$ mit $\sum_j \lambda_j = 1$. Sie heisst einer offenen Überdeckung $(U_k \mid k \in K)$ von M **untergeordnet**, wenn für alle j ein $k(j)$ existiert, mit $\mathrm{Tr}(\lambda_j) \subset U_{k(j)}$.

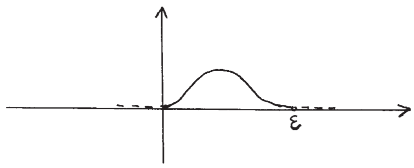
Durch so eine Zerlegung erhält man die Zerlegung $\beta = \sum_j \lambda_j \cdot \beta$ der Form, die man integrieren will, wobei die U_k Kartengebiete sind, und hat man eine andere Zerlegung $\{\mu_i\}$ der Eins, so kann man die Zerlegung $\{\lambda_j \cdot \mu_i\}$ betrachten, und sieht, dass hier das Integral von jedem Summanden $\lambda_j \mu_i \beta$ nicht davon abhängt, ob man mit der Karte von $\lambda_j \beta$ oder der von $\mu_i \beta$ integriert, nach (2.6).

(2.7) **Satz.** *Überdeckt man M mit (endlich vielen) Kartengebieten U_k, so gibt es dazu eine untergeordnete Partition der Eins von C^∞-Funktionen.*

Beweis. Man hat auf $\mathbb{R}$ die C^∞-Funktion $\gamma(t) = \exp(-t^{-1})$ für $t > 0, \gamma(t) = 0$ sonst:



also $\gamma(t) \cdot \gamma(\varepsilon - t)$ ist eine „Glockenfunktion“ um $\varepsilon/2$ auf $\mathbb{R}$ und $\gamma(t_1) \ldots \gamma(t_n)$ entsprechend auf $\mathbb{R}^n$.



Damit findet man um jeden Punkt $p \in M$ ein Kartengebiet U_k und eine Funktion δ_p mit Träger in U_k und $\delta_p(p) > 0$, $\delta_p \geq 0$. Endlich viele der Mengen $V_p = \{x \mid \delta_p(x) > 0\}$ überdecken M. Seien $\delta_1, \ldots, \delta_\ell$ die zugehörigen δ_p's und $\delta = \delta_1 + \ldots + \delta_\ell$. Dann bilden die Funktionen $\lambda_j = \delta_j / \delta$ die gesuchte Zerlegung der Eins. □

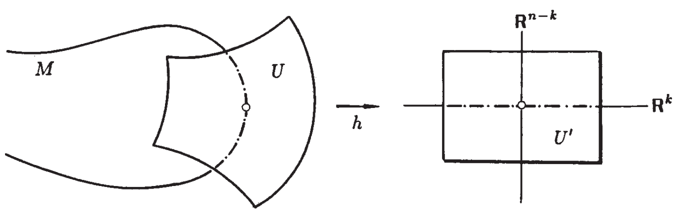
Das ist eine geschickte technische Errungenschaft: Statt etwa M in kleine Stücke zu zerschneiden, zerlegt man auf glatte Weise die Form β in $\sum_j \lambda_j \cdot \beta$, und die Summanden sind ebenso glatt wie β.

(2.8) **Satz.** *Für beliebige Differentialformen ζ, η mit Grad $\zeta = i$ gilt:*
(i) $d(\zeta \wedge \eta) \;=\; (d\zeta) \wedge \eta + (-1)^i \zeta \wedge d\eta$.
(ii) $\varphi^*(\zeta \wedge \eta) \;=\; \varphi^*(\zeta) \wedge \varphi^*(\eta)$.
(iii) $d\varphi^* \;=\; \varphi^* d$.

Beweis: (i) und (ii) rechnet man für Formen $f \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ nach, dann muss man (iii) nur für Funktionen und dx_i als Formen nachprüfen, Aufgabe. □

3. Der allgemeine Satz von Stokes

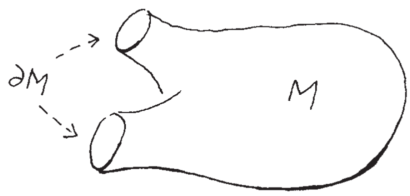
Bisher haben wir Untermannigfaltigkeiten $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ betrachtet, die also Karten $(U, M \cap U) \underset{h}{\to} (U', \mathbb{R}^n \cap U')$ für einen Atlas haben, und damit lokale Koordinaten $h \mid M \cap U : M \cap U \to \mathbb{R}^n \cap U'$ mit Umkehrung $\varphi : \mathbb{R}^n \cap U' \to M \cap U$, die in M eine Umgebung $M \cap U$ parametrisieren.



M sieht dann überall lokal in geeigneten Koordinaten aus wie $\mathbb{R}^n$. Jetzt wollen wir auch zulassen, dass M einen Rand ∂M hat. Sei $\mathbb{R}^n_- = \{x \in R^n \mid$

$x_1 \leq 0\}$. Eine berandete Mannigfaltigkeit M hat einen Atlas mit inversen Karten $U' \cap \mathbb{R}^n_- \underset{\varphi}{\rightarrow} U \cap M$, wobei U' offen in $\mathbb{R}^n$ ist. Der Rand ∂M besteht aus den Punkten, die dabei in $\varphi(\mathbb{R}^{n-1} \cap U')$ liegen, mit $\mathbb{R}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$. (Im Fall $n = 1$ muss man auch Karten $U' \cap \mathbb{R}_+ \rightarrow U \cap M$ zulassen).

Beispiel. Die Vollkugel $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ mit $\partial D^n = S^{n-1}$.



Sonst bleibt für Differentialformen und Integrale alles wie bisher, und wir betrachten nur $M \subset \mathbb{R}^3$. Der Rand ∂M erhält durch Einschränkung der inversen Karten (Koordinaten) auf $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n_-$ einen Atlas für die Struktur einer $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit ohne Rand: $\partial(\partial M) = \phi$.
Wir setzen nach wie vor voraus, dass M **orientiert** ist, d.h. wir haben einen Atlas von M ausgewählt, dessen Kartenwechsel alle positive Jacobideterminante haben.

(3.1) **Lemma.** *Auch ∂M ist durch den gewählten Atlas orientiert.*

Beweis. Die Kartenwechsel vom ∂M entstehen durch Einschränkung der Kartenwechsel von M auf $\mathbb{R}^{n-1}$, also durch Einschränkung von lokalen Diffeomorphismen mit positiver Jacobideterminante

$$g \ : \ (\mathbb{R}^n_-, p) \ \longrightarrow \ (\mathbb{R}^n_-, q)$$

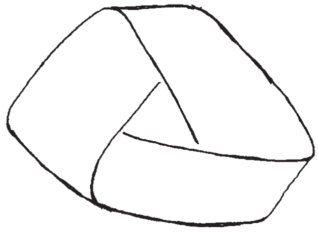
auf den Rand $\partial\mathbb{R}^n_- = \mathbb{R}^{n-1}$. Aber g bildet $\partial\mathbb{R}^n_-$ nach $\partial\mathbb{R}^n_-$ ab, also $g_1(0, x_2, \ldots, x_n) = 0$, und daher hat g die Jakobische

$$Dg \ = \ \left[\begin{array}{c|c} \partial g_1/\partial x_1 & 0\ldots0 \\ \hline & D(g|\mathbb{R}^{n-1}) \end{array}\right] \quad \text{in Punkten von } \partial\mathbb{R}^n_- = \mathbb{R}^{n-1}$$

Dabei ist $g \mid \mathbb{R}^{n-1}$ ein Kartenwechsel der gewählten Atlanten von ∂M. Aber $\partial g_1/\partial x_1 = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g_1(h,x_2,\ldots,x_n)}{h}$, und wählen wir $h < 0$ also $x \in \mathbb{R}^n_-$, so ist auch $g_1 < 0$, also $\partial g_1/\partial x_1 > 0$, also $\det(Dg \mid \mathbb{R}^{n-1}) > 0$. □

Die gewählte Orientierung heisst die Orientierung **durch die äußere Normale**. Ist z.B. $\dim M = 3$, $M \subset \mathbb{R}^3$, so ist M orientiert dadurch, dass wir alle

Karten mit positiver Jacobideterminante wählen und damit natürlich auch die Kartenwechsel. Sowas wie das Möbiusband kann in ∂M nicht auftreten.



Sei jetzt M kompakt, berandet, orientiert, und $M \subset \mathbb{R}^3$, also $m = \dim M \leq 3$.

(3.2) **Allgemeiner Satz von Stokes.** *Sei β eine alternierende Differentialform vom Grad $m-1$ auf (einer Umgebung von) M. Dann ist*

$$\int\limits_M d\beta \;=\; \int\limits_{\partial M} \beta.$$

Beachte die Schönheit der Formel: d ist eine analytische, ∂ eine geometrische Bildung.

Beweis. Vorbemerkung: Man hat Diffeomorphismen $(a,b) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$ für $a < b$, und $(a,0] \cong (-\infty, 0]$ für $a < 0$, die man mit Hilfe von $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$ leicht hinschreibt. Damit hat man orientierungserhaltende Diffeomorphismen eines offenen Würfels $W \subset \mathbb{R}^m$ mit $\mathbb{R}^m$, und für einen offenen Würfel $W' \subset \mathbb{R}^{m-1}$ von $(a,0] \times W'$ mit $\mathbb{R}^m_-$. Daraus ergibt sich, dass man für M einen Atlas von inversen Karten $\varphi : \mathbb{R}^m \to M$ oder $\varphi : \mathbb{R}^m_- \to M$ hat. Solchen wählen wir, wählen eine Partition der Eins $(\lambda_j \mid j = 1, \ldots, \ell)$ so dass jedes λ_j den Träger im Bild einer Karte hat und zerlegen $\beta = \sum_j \lambda_j \cdot \beta$, $d\beta = \sum_j d\lambda_j \beta$ und müssen den Satz nur für die $\lambda_j \beta$ zeigen, also oBdA hat β Träger im Bild einer der obigen Karten. Wir betrachten β in diesen lokalen Koordinaten mit (2.8, iii). Dann ist β Summe von Formen der Gestalt $b(x)\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m$ oder $b(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_m, i = 2, \ldots, m$, Tarnkappe: das Glied dx_i fehlt.

Im rechten Fall ist $d\beta = \pm \partial b / \partial x_i \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ und das iterierte Integral verschwindet, weil das Integral über x_i liefert $[b]_{x_i=-\infty}^{x_i=\infty} = 0$. Auch $\int_{\partial \mathbb{R}^m_-} \beta = 0$ weil dx_1 auf $\mathbb{R}^{m-1}$ auf $\sum_{i>1} \partial x_1 / \partial x_i \, dx_i = 0$ geht, und falls wir in Koordinaten $\mathbb{R}^m$ sind, ist sowieso $\partial \mathbb{R}_m = \phi$.

Im linken Fall sieht es ebenso aus in Koordinaten $\mathbb{R}^m$, aber $\int_{\mathbb{R}^m_-} d\beta = \int_{\mathbb{R}^m_-} \partial b / \partial x_1 dx_1 \ldots dx_m =$ (über x_1 integrieren!) $\int_{\mathbb{R}^{m-1}} b(0, x_2, \ldots, x_m) =$

$\int_{\partial\mathbb{R}^m_-}\beta$. Man muss noch, falls $\dim M = 1$, auch Karten $\mathbb{R}_+ \to M$ zulassen, mit $\int_{\partial\mathbb{R}_+} f = -f(0)$. $\square$

Anwendung (i): Sei M eine kompakte Fläche in $\mathbb{R}^3$ ohne Rand und $\alpha = a \cdot ds$ eine Pfaffsche Form auf $\mathbb{R}^3$, wie immer M orientiert. Dann ist

$$\int_M d\alpha \;=\; \int_M \mathrm{rot}(a)\cdot dF \;=\; \int_{\partial M}\alpha \;=\; \int_{\phi}\alpha \;=\; 0.$$

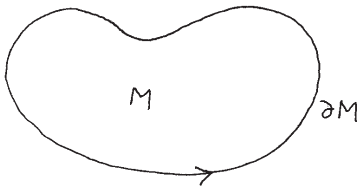
Anwendung 2. Sei $\dim M = 2$ und $M \subset \mathbb{R}^2$ mit einer Parametrisierung

$$t \mapsto {}^t\big(x(t), y(t)\big), 0 \le t \le 1$$

von ∂M. Betrachte die Pfaffsche Form $\alpha = xdy$ auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\int_0^1 x(t)\cdot \dot{y}(t)dt \;=\; \int_{\partial M}\alpha \;=\; \int_M d\alpha \;=\; \int_M dx\wedge dy \;=\; \mathrm{vol}(M)$$

wobei $\mathrm{vol}(M)$ in diesem Fall den Flächeninhalt von M bezeichnet.



Mit der Form $y\,dx$ erhält man ebenso $\mathrm{vol}(M) = -\int_0^1 y(t)\,\dot{x}(t)\,dt$ und symmetrischer aus beidem

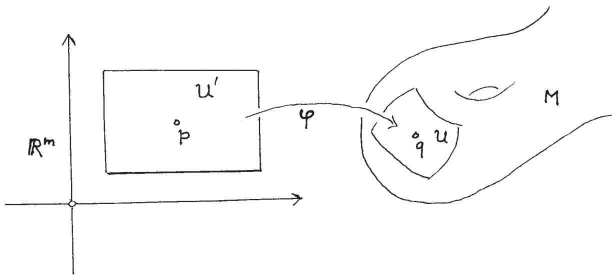
$$\mathrm{vol}(M) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt.$$

4. Der Divergenz- und Rotationssatz

Wenn man eine Metrik auf einer Mannigfaltigkeit M hat, und das heisst für uns, wenn man die auf $M \subset \mathbb{R}^3$ von $\mathbb{R}^3$ induzierte Metrik auf M benutzt, kann man auch Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ auf wohldefinierte Weise integrieren. Für $\dim M = m$ hat man nämlich auf M eine durch die euklidische Metrik von $\mathbb{R}^3$ bestimmte m-Form ω_M, die nirgends verschwindet, die **kanonische Volumenform**, und setzt darin

$$\int_M f \;:=\; \int_M f \cdot \omega_M. \tag{4.1}$$

Die Form ω_M ist so definiert:



Ist $\varphi : \mathbb{R}^m \supset U' \to U \subset M$ ein orientiertes lokales Koordinatensystem und $D\varphi(p) : \mathbb{R}^m \to T_qM \subset \mathbb{R}^3$ orthonormal, so ist an der Stelle p (nicht auf ganz U'):

$$\varphi^*\omega_M \;=\; du_1 \wedge \ldots \wedge du_m \tag{4.2}$$

für die Koordinaten $(u_1, \ldots, u_m)$ von U'. Weil orthogonale Abbildungen mit positiver Determinante die Determinante 1 haben, ist damit $\varphi^*\omega_M$ wohlbestimmt, und damit auch ω_M. Wir wollen jetzt ω_M explizit angeben:

$m = 1$: Eine lokale Parametrisierung von M hat die Gestalt $\varphi : t \mapsto x(t)$ und es ist

$$\varphi^*\omega_M \;= |\dot{x}(t)| \cdot dt \tag{4.3}$$

Beachte, dass dies sich in der Tat wie eine Pfaffsche Form transformiert bei Koordinatenwechsel, und für $|\dot{x}| = 1$ steht nur dt da.

$m = 3$: Hier ist einfach

$$\omega_M \;= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \tag{4.4}$$

und bei Koordinatenwechsel $\varphi : {}^t(u_1, u_2, u_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ folglich $\varphi^*\omega_M = \det D\varphi \cdot du_1 \wedge du_2 \wedge du_3$.

Der für uns interessante Fall ist der orientierter Flächen $M \subset \mathbb{R}^3, m = 2$: Sei $\varphi : (u_1, u_2) \mapsto x(u_1, u_2) \in M \subset \mathbb{R}^3$ ein lokales Koordinatensystem auf M wie oben. Dann ist

$$\varphi^*\omega_M \;=\; |\partial x/\partial u_1 \times \partial x/\partial u_2| \cdot du_1 \wedge du_2. \tag{4.5}$$

In der Tat, ist $D\varphi$ bei p orthonormal, also sind $\partial x/\partial u_1, \partial x/\partial u_2$ orthogonale Einheitsvektoren, so sagt die Definition $\varphi^*\omega_M = du_1 \wedge du_2$. Wir haben nur nachzurechnen, dass die rechte Seite von (4.5) sich unter Koordinatenwechsel $(v_1, v_2) \mapsto \big(u_1(v_1, v_2), u_2(v_1, v_2)\big)$ wie eine 2-Form transformiert, und das ist leicht: Es ist

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial x/\partial v_1 &=& \partial u_1/\partial v_1 \cdot \partial x/\partial u_1 + \partial u_2/\partial v_1 \cdot \partial x/\partial u_2, \\ \partial x/\partial v_2 &=& \partial u_1/\partial v_2 \cdot \partial x/\partial u_1 + \partial u_2/\partial v_2 \cdot \partial x/\partial u_2, \end{array}\right\}$$

$$\times - \text{Multiplizieren: } |\partial x/\partial v_1 \times \partial x/\partial v_2| \;=\;$$
$$(\partial u_1/\partial v_1 \cdot \partial u_2/\partial v_2 - \partial u_2/\partial v_1 \cdot \partial u_1/\partial v_2) \cdot |\partial x/\partial u_1 \times \partial x/\partial u_2|$$

und der Faktor $(\dots)$ ist gerade die Determinante, womit die 2-Form von $du_1 \wedge du_2$ nach $dv_1 \wedge dv_2$ zu transformieren ist. Das muss ja auch so sein, weil in beiden Fällen bilinear und alternierend zu rechnen ist. Beachte, dass die Determinanten wegen unserer Voraussetzung an Orienterung stets positiv sind.

Die Ableitung von φ also lineare Approximation $D\varphi(u) = \big(\partial x_i/\partial u_j(u)\big)$ bildet die beiden Standard-Einheitsvektoren $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ auf die Tangentialvektoren $\partial x/\partial u_1, \partial x/\partial u_2$ von M an der Stelle $x(u) = \varphi(u)$ ab, und damit das Einheitsquadrat mit den Ecken $0, e_1, e_2, e_1 + e_2$ auf das Parallelogramm mit den Ecken $0, \partial x/\partial u_1, \partial x/\partial u_2$, $\partial x/\partial u_1 + \partial x/\partial u_2$ im Tangentialraum $T_{\varphi(u)}M$. Die Größe dieses Parallelogramms ist $|\partial x/\partial u_1 \times \partial x/\partial u_2|$ und mit dieser Größe gewichtet die Volumenform $\varphi^*\omega_m$ von M in Koordinaten φ jeweils $du_1 \wedge du_2$ an der Stelle u; in einem Wort also: mit dem Flächen-Ausdehnungsfaktor von $D\varphi(u)$.

Die Volumenformen haben wir nur auf M selbst angegeben, nicht in einer Umgebung. Das wäre mit einer Zerlegung der Eins auch leicht zu machen, aber sie interessieren wirklich nur auf M. Ist nun $\dim M = 2$, $M \subset \mathbb{R}^3$ und nach wie vor M orientiert, so hat M an jeder Stelle einen **nach aussen weisenden Normalvektor** der Länge 1, bestimmt dadurch, dass für jedes lokale Koordinatensystem wie oben gilt: $\mathfrak{n}(q)$ ist orthogonal zu T_qM, $|\mathfrak{n}(q)| = 1$, und $(\partial x/\partial u_1, \partial x/\partial u_2, \mathfrak{n})$ ist eine positiv orientierte Basis. Dies $\mathfrak{n}$ ist auch in Formeln explizit anzugeben, nämlich für $x(p) = q$:

$$\mathfrak{n}(q) \;=\; |\partial x/\partial u_1 \times \partial x/\partial u_2|^{-1} \cdot \partial x/\partial u_1 \times \partial x/\partial u_2. \tag{4.6}$$

Eine 3-dim Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$ ist orientierbar durch die Bestimmung: Man hat Koordinaten $\mathbb{R}^3_- \supset U' \underset{\varphi}{\to} U \subset M \subset \mathbb{R}^3$ so zu wählen, dass $\det D\varphi > 0$ überall. Eine $1-$dim zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist eine Kurve und wird durch den Durchlaufungssinn orientiert. Bei $2-$dim Mannigfaltigkeiten gibt es ein Problem, wie das Möbiusband zeigt, aber ist M dreidimensional so ist ∂M stets eindeutig dadurch orientierbar, dass Koordinaten $\mathbb{R}^3_- \supset U' \underset{\varphi}{\to} U \subset M \subset \mathbb{R}^3$ mit positiver Determinante gewählt werden. Das legt auch das Vorzeichen der Determinante von Kartenwechseln auf $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3_-$ fest, wie in §3 erklärt.

Damit haben wir alles beisammen für:

(4.7) **Divergenzsatz von Gauß .** *Sei M eine kompakte berandete 3-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ und b ein Vektorfeld auf M. Dann ist*

$$\int_M div(b) \cdot dx_1\, dx_2\, dx_3 \;=\; \int_{\partial M} \langle b, \mathfrak{n}\rangle\, \omega_{\partial M}.$$

Beweis. Auf der linken Seite steht das Integral der Form $\operatorname{div}(b)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = d(b \cdot dF)$ über M. Nach dem allgemeinen Satz von Stokes muss rechts stehen:

$$\int_{\partial M} b \cdot dF,\; b \;=\; \begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ b_3(x) \end{bmatrix},\; dF \;=\; \begin{bmatrix} dx_2 \wedge dx_3 \\ dx_3 \wedge dx_1 \\ dx_1 \wedge dx_2 \end{bmatrix}.$$

Notiz. Für eine orientierte Fläche $N \subset \mathbb{R}^3$, hier $N = \partial M$, ist $b \cdot dF = \langle b, \mathfrak{n}\rangle \cdot \omega_N$.
In der Tat: Für lokale Koordinaten $(u_1, u_2) \underset{\varphi}{\mapsto} x(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ von N ist

$$\begin{aligned}
&\varphi^* \langle b, \mathfrak{n}\rangle \omega_N \\
&= \langle b, \partial x/\partial u_1 \times \partial x/\partial x/\partial u_2\rangle \;\cdot\; \tfrac{1}{|\partial x/\partial u_1 \times \partial x/\partial u_2|} \;\cdot\; |\ldots| \;\cdot\; du_1 \wedge du_2 \\
&= \langle b, \partial x/\partial u_1 \times \partial x/\partial u_2\rangle \;\cdot\; du_1 \wedge du_2 \\
&= \det \begin{bmatrix} b_1 & \partial x_1/\partial u_1 & \partial x_2/\partial u_2 \\ b_2 & \partial x_2/\partial u_1 & \partial x_2/\partial u_2 \\ b_3 & \partial x_3/\partial u_1 & \partial x_3/\partial u_2 \end{bmatrix} \;\cdot\; du_1 \wedge du_2 \\
&= \left(b_1 \;\cdot\; \left|\tfrac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u_1,u_2)}\right| \;+\; b_2 \left|\tfrac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u_1,u_2)}\right| \;+\; b_3 \left|\tfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u_1,u_2)}\right| \right) \;\cdot\; du_1 \wedge du_2 \\
&= \varphi^* b \cdot dF.
\end{aligned}$$

□

(4.8) **Rotationssatz von Stokes.** *Sei $N \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte berandete* **orientierte** *Fläche und a ein Vektorfeld auf (lokal um) N. Sei $\mathfrak{n}$ das äussere Einheitsnormalenfeld auf N. Dann ist*

$$\int_N \langle rot(a), \mathfrak{n}\rangle\, \omega_N \;=\; \int_{\partial N} \langle a, \mathfrak{t}\rangle\, \omega_{\partial N}$$

$\mathfrak{t}$ = *positiver Einheits-*$\mathfrak{t}$*angentialvektor*

Beweis. Wir starten mit der Pfaffschen Form $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 = \alpha$. Dann ist $d\alpha = \mathrm{rot}(a) \cdot dF$ und wir haben eben ausgerechnet, dass die linke Seite gleich $\int_N \mathrm{rot}\, a \cdot dF = \int_N d\alpha$ ist. Dies ist nach der allgemeinen Stokes-Formel gleich $\int_{\partial N} \alpha$, und das ist in der Tat, was rechts steht: Für eine positiv orientierte Parametrisierung $t \mapsto x(t)$ von ∂N ist nämlich $\langle a, \mathfrak{t} \rangle = \langle a, \dot{x} \rangle \cdot \frac{1}{|\dot{x}|}$ und $\omega_N = |\dot{x}|\, dt$, also $\langle a, \mathfrak{t} \rangle \omega_{\partial N} = (a_1 \dot{x}_1 + a_2 \dot{x}_2 + a_3 \dot{x}_3)\, dt$, und das Integral darüber ist nach Definition das Integral $\int_{\partial N} \alpha$. □

Anwendung. Der Ortsvektor x hat $\mathrm{div}\, x = 3$, und die Einheitskugel hat am Rand $\mathfrak{n} = x$, also

$$\mathrm{vol}_2(S^2) \;=\; \int_{S^2} \langle x, x \rangle\, \omega_{S^2} \;=\; \int_{S^2} \langle x, \mathfrak{n} \rangle\, \omega_{S^2} \;=\; \int_{D^3} \mathrm{div}\, x \;=\; 3\, \mathrm{vol}_3(D^3).$$

□

Für ein Vektorfeld b und eine Funktion f in $\mathbb{R}^3$ ist

$$\mathrm{div}(f \cdot b) \;=\; \langle \mathrm{grad}\, f, b \rangle \;+\; f \;\cdot\; \mathrm{div}(b)$$

nach Produktregel. Setze $b = \mathrm{grad}\, g$, so folgt

$$\mathrm{div}(f \cdot \mathrm{grad}\, g) \;=\; \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, g \rangle \;+\; f \;\cdot\; \Delta g,$$

$\Delta g = \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, g = \partial^2 g / \partial x_1^2 + \partial^2 g / \partial x_2^2 + \partial^2 g / \partial x_3^2$ **Laplace-Operator**. Vertauscht man hier f und g und subtrahiert beide Formeln, so folgt:
$\mathrm{div}(f\, \mathrm{grad}\, g - g\, \mathrm{grad}\, f) = f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f$.

(4.9) **Greensche Formel.**

$$\int_M (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f) \;=\; \int_{\partial M} \langle f \cdot \mathit{grad}\, g - g \cdot \mathit{grad}\, f, \mathfrak{n} \rangle \omega_{\partial M}.$$

□

Ist z.B. g eine Testfunktion, die auf ∂M samt Ableitung verschwindet, so verschwindet die rechte Seite und es ergibt sich

$$\int_M f \cdot \Delta g \;=\; \int_M \Delta f \cdot g, \text{ d.h. } \langle f, \Delta g \rangle_2 \;=\; \langle \Delta f, g \rangle_2,$$

und das sagt, dass Δ auf einem geeigneten Funktionenraum ein selbstadjungierter Operator ist. ...

5. Formelsammlung

Pfaffsche Form in $\mathbb{R}^3$: $a = (a_1, a_2, a_3)$, $ds = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$, $\alpha \;=\; a \cdot ds$.

Zweiform: $b = (b_1, b_2, b_3)$, $dF = \begin{bmatrix} dx_2 \wedge dx_3 \\ dx_3 \wedge dx_1 \\ dx_1 \wedge dx_2 \end{bmatrix}$, $\beta \;=\; b \cdot dF$.

Dreiform: $dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, $\gamma = g \cdot dV$.
Es sind dabei $a_i, b_j, g : G \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Dachprodukte:

$$\begin{aligned}
(a \cdot ds) \wedge (d \cdot ds) &= (a \times d) \cdot dF \\
(a \cdot ds) \wedge (b \cdot dF) &= \langle a, b \rangle \cdot dV \\
(a \cdot ds) \wedge (d \cdot ds) \wedge (r \cdot ds) &= \det(a, d, r) \cdot dV.
\end{aligned}$$

Für beliebige Differentialformen ζ, η ist mit $\mathrm{Grad}(\zeta) = i$ ist

$$d(\zeta \wedge \eta) \;=\; d\zeta \wedge \eta \;+\; (-1)^i \zeta \wedge d\eta.$$

Äussere Ableitung: Für eine Funktion f ist $df = {}^t\mathrm{grad}(f) \cdot ds$,

$d(a \cdot ds) = \mathrm{rot}(a) \cdot dF$, $d(b \cdot dF) = \mathrm{div}(b) \cdot dV$.

Transformation: Für $\varphi : (u_1, \ldots, u_m) \mapsto \big(x_1(u), \ldots, x_k(u)\big)$ ist $\varphi^* f(u) = f\varphi(u)$ und $\varphi^* dx_i = \sum_j \partial\varphi_i / \partial u_j \cdot du_j$. Insbesondere:
Für $m = k$ ist $\varphi^*\big(g(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m\big) = \det\big(D\varphi(u)\big) \cdot du_1 \wedge \ldots du_m$.
Für $m = 2,\ k = 3$ ist

$$\varphi^*(b \cdot dF) \;=\; \det(b, \partial\varphi/\partial u_1, \partial\varphi/\partial u_2)\, du_1 \wedge du_2.$$

Es ist $\varphi^* d\eta = d\varphi^* \eta$ für beliebige Differentialformen η.

Komplex der Differentialformen: $\Gamma(g)$ Raum der Fektorfelder auf G.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \overset{d}{\hookrightarrow} & \Omega^0(G) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(G) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(G) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(G) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \| & & \|\,(1) & & \|\,(2) & & \|\,(3) & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & C^\infty(G) & \xrightarrow[\text{grad}]{} & \Gamma(G) & \xrightarrow[\text{rot}]{} & \Gamma(G) & \xrightarrow[\text{div}]{} & C^\infty(G) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Die Isomorphismen von unten nach oben sind gegeben durch

$$(1)\ \ {}^t a \longmapsto a \cdot ds, \qquad (2)\ \ {}^t b \longmapsto b \cdot dF, \qquad (3)\ \ g \longmapsto g \cdot dV.$$

Exaktheit: Es ist $d \circ d = 0$, und ist G sternförmig und $d\varphi = 0$ für eine k-Form φ, so gibt es eine $(k-1)$-Form ψ mit $d\psi = \varphi$. Es ist ψ ein (Vektor-)Potential von φ.

Allgemeiner Satz von Stokes: Sei M kompakt, berandet, orientiert, $\dim M = m$, und α eine $(m-1)$-Form auf M. Dann ist

$$\int_M d\alpha \;=\; \int_{\partial M} \alpha.$$

Satz von Gauß : Sei M kompakt, berandet in $\mathbb{R}^3$ und $\dim M = 3$. Sei b ein Vektorfeld auf M. Dann ist

$$\int_M \operatorname{div}(b) \;=\; \int_{\partial M} \langle b, \mathfrak{n} \rangle.$$

In lokalen Koordinaten $u = (u_1, u_2) \to x \in \partial M$ ist:

Kanonische Volumenform $\omega_{\partial M} = |\partial x/\partial u_1 \times \partial x/\partial u_2| \cdot du_1 \wedge du_2$,
$\mathfrak{n} = |\partial x/\partial u_1 \times \partial x/\partial u_2|^{-1} \cdot \partial x/\partial u_1 \times \partial x/\partial u_2$.

Rotationssatz von Stokes: Sei M kompakt, berandet, orientiert in $\mathbb{R}^3$ und $\dim M = 2$. Sei a ein Vektorfeld auf M. Dann:

$$\int_M \langle \operatorname{rot}(a), \mathfrak{n} \rangle \;=\; \int_{\partial M} \langle a, \mathfrak{t} \rangle,$$

$\mathfrak{t}$ positiver Einheitstangentialvektor auf ∂M. In einer lokalen Parametrisierung $t \mapsto x(t) \in \partial M$ ist hier:

$$\omega_{\partial M} \;=\; |\dot{x}|\, dt \;\text{ und }\; \mathfrak{t} \;=\; |\dot{x}|^{-1} \;\cdot\; \dot{x}.$$

Greensche Formel: Sei M kompakt berandet in $\mathbb{R}^3$ und die Funktion f oder g habe kompakten Träger. Dann gilt:

$$\int_M (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f) \;=\; \int_{\partial M} \langle \big(f \cdot \operatorname{grad}(g) - g \cdot \operatorname{grad}(f)\big), \mathfrak{n} \rangle$$

$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad}(f) = \sum_i \partial^2 f/\partial x_i^2$ Laplace-Operator.

Satz von Stokes in der Ebene: Berandet die einfach geschlossene Kurve $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^2$ die Fläche F, so:

$$\text{Fläche von } F \;=\; \operatorname{vol}_2(F) \;=\; \int_0^1 x_1(t)\dot{x}_2(t)\, dt \;=\; -\int_0^1 x_2(t)\dot{x}_1(t)\, dt.$$

VI. Kapitel

Und noch viel mehr

1. Variationsrechnung

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten Funktionen $u : G \to \mathbb{R}$ mit gegebenen Randwerten $u|\partial G$ und vielleicht auch gegebenen Ableitungen $du|\partial G$ auf dem Rand, je nach Problemlage. Die Gesamtheit der so zugelassenen Funktionen bilden einen Raum $\mathcal{X}$ von Funktionen. Wir denken als Beispiel an: u ist die Auslenkung einer Membran über G, die am Rand ∂G eingespannt ist, oder $G = [a, b]$ und u eine Koordinate einer Kurve $[a, b] \to \mathbb{R}^m$, die vorgegebene Punkte $u(a)$, $u(b)$ verbindet.

Gegeben sei eine Funktion L von den Werten $u(x)$ und den Werten der Ableitungen $u_i = \partial u/\partial x_i$, $u_{jk} = \partial^2 u/\partial x_j \partial x_k$. Meist kommen keine höheren Ableitungen vor, obwohl das unwesentlich ist, also

$$(1.1) \qquad L \;=\; L(u, u_i, u_{jk}),\;\; i, j, k = 1, \dots , n.$$

Zu diesen Daten bilden wir das Integral

$$(1.2) \qquad \mathcal{L}(u) \;=\; \int\limits_G L\big(u(x),\, \partial u/\partial x_i(x),\, \partial^2 u/\partial x_j \partial x_k(x)\big)\; dx_1 \dots dx_n.$$

Wir stellen uns vor, dass $\mathcal{L}$ z.B. eine Energie beschreibt, die der jeweiligen Funktion zugeordnet ist.

Man kann das so ansehen: Auf dem Funktionenraum $\mathcal{X}$, von dem oben die Rede war, liefert L durch (1.2) die Funktion

$$\mathcal{L} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R},\;\; u \longmapsto \mathcal{L}(u).$$

Das u sehen wir dann als eine Variable im Raum $\mathcal{X}$ an. Nun wollen wir etwa u so bestimmen, dass $\mathcal{L}(u)$ minimal wird unter allen $u \in \mathcal{X}$. Um diese Aufgabe zu lösen, sollten wir $\mathcal{L}$ an der Stelle u ableiten und die Ableitung 0 setzen. Das kann man ganz plausibel machen.

Wir betrachten kleine Störungen von u durch **Testfunktionen** σ, das sind endliche Summen von C^∞-Funktionen auf G, die jeweils ihren Träger in einen kompakten Würfel $W \subset G$ haben. (Mit einer Partition der Eins sieht man leicht, dass dies genau die C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger in G sind). Wir bilden damit die **Kurve** $s \mapsto u + s \cdot \sigma$ **in** $\mathcal{X}$ **durch** u **in Richtung** σ, und betrachten $\mathcal{L} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ auf dieser Kurve, explizit:

$$(1.3) \qquad \mathcal{L}(u + s \cdot \sigma) \;=\; \int\limits_G L\bigl(u + s\sigma,\ \frac{\partial}{\partial x_i}(u + s \cdot \sigma),\ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(u + s\sigma)\bigr).$$

Wenn nun u die Funktion $\mathcal{L}$ auf $\mathcal{X}$ minimiert oder in vernünftigem Sinne lokal um u minimiert, so ist jedenfalls

$$(1.4) \qquad d/ds \underset{s=0}{|} \mathcal{L}(u + s \cdot \sigma) \;=\; 0 \;\text{ für jede Testfunktion } \sigma.$$

Diese Bedingung (1.4) drückt man aus durch

$$(1.5) \qquad \delta \mathcal{L}(u) \;=\; \delta \int\limits_G L(u, u_i, u_{jk}) \;=\; 0$$

und mit (1.5) ist einfach (1.4) gemeint. Man kann aber in der Tat $\delta\mathcal{L}$ als Ableitung von $\mathcal{L}$ interpretieren, nämlich

$$\delta \mathcal{L}(u) \;:\; \sigma \longmapsto \frac{d}{ds} \underset{s=0}{|} \mathcal{L}(u + s \cdot \sigma) \in \mathbb{R},$$

wobei σ die Richtung angibt, in der $\mathcal{L}$ abgeleitet wird, oder den Vektor, auf den $\delta\mathcal{L}(u)$ wirkt.

Wie dem auch sei, wir können uns an die ganz explizite Formel (1.4) halten, explizit nach (1.3):

$$\frac{d}{ds} \underset{s=0}{|} \int\limits_G L\bigl(u + s \cdot \sigma,\ \partial/\partial x_i(u + s \cdot \sigma),\ \partial^2/\partial x_j \partial x_k(u + s\sigma)\bigr) \;=\; 0$$

Ziehe $d/ds \underset{s=0}{|}$ unters Integral und vorbei an den Ableitungen $\partial/\partial x_i$, $\partial^2/\partial x_j \partial x_k$, also z.B. $\frac{d}{ds}\underset{0}{|}\bigl(\partial/\partial x_i(u + s \cdot \sigma)\bigr) = \partial/\partial x_i\bigl(\frac{d}{ds}\underset{0}{|}(u + s \cdot \sigma) = \partial/\partial x_i \sigma$, dann steht da:

$$(1.6)$$
$$0 \;=\; \int\limits_G \bigl(\partial L/\partial u \cdot \sigma + \sum_i \partial L/\partial u_i \cdot \partial/\partial x_i \sigma + \sum_{j,k} \partial L/\partial u_{jk} \partial^2 \sigma/\partial x_j \partial x_k\bigr).$$

Die partiellen Ableitungen von L sind dabei immer an der Stelle (u, u_i, u_{jk}) zu nehmen. Die Bedingung (1.6) muss für alle Testfunktionen σ und die gesuchte Funktion u bzw. u_{x_i}, $u_{x_j x_k}$ erfüllt sein. Nun bedenke: Für jede Funktion φ auf G ist

$$\partial/\partial x_i(\varphi \cdot \sigma) \;=\; (\partial/\partial x_i \varphi) \cdot \sigma \;+\; \varphi \cdot \partial/\partial x_i \sigma.$$

Aber $\int_G \partial/\partial x_i(\varphi \cdot \sigma) = 0$ weil ja σ und damit die Stammfunktion $\varphi \cdot \sigma$ oBdA ausserhalb eines Würfels in G verschwindet. So kann man durch partielle Integration in (1.6) die Ableitungen von σ auf den Faktor $\partial L/\partial u_i$ verschieben, und ebenso (zweimal) für $\partial^2/\partial x_j \partial x_k$. Dann steht da;

$$(1.7) \quad 0 \;=\; \int\limits_G \big(\partial L/\partial u - \sum_i \partial/\partial x_i \; \partial L/\partial u_i + \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial x_j/\partial x_k} \partial L/\partial u_{jk}\big) \cdot \sigma,$$

für alle Testfunktionen σ.

Hier werden die u_i und u_{jk} als unabhängige Variable behandelt, nach denen man L partiell ableitet. Dann setzt man $u(x)$ ein, bildet $\partial/\partial x_i, \ldots$, und integriert über G. Nun, dass so eine Gleichung $0 = \int_G \varphi \cdot \sigma$ für jede Testfunktion σ gilt, heisst einfach $\varphi = 0$, denn wäre z.B. irgendwo in einer Umgebung $\varphi > 0$, so kann man dort eine Glockenfunktion $\sigma \geq 0$ ansiedeln, die nur $\neq 0$ und auch irgendwo > 0 ist, wo $\varphi > 0$. Dann wäre auch $\int_G \varphi \cdot \sigma > 0$.

Also schließt man aus (1.7)

(1.8) **Euler-Lagrange Gleichung.** *Genau dann ist $\delta\mathcal{L}(u) = 0$, wenn u erfüllt:*

$$0 \;=\; \partial L/\partial u - \sum_i \partial/\partial x_i \partial L/\partial u_i \;+\; \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \partial L/\partial u_{jk}.$$

□

(Erst $\partial L/\partial u$, $\partial L/\partial u_i, \partial L/\partial u_{jk}$ bilden, dann $u(x)$ einsetzen, dann $\partial/\partial x_i$, $\partial^2/\partial x_j \partial x_k$ bilden!) Hat $u = (u^1, \ldots , u^m)$ mehrere Komponenten, so erhält man die Gleichung (1.8) für jede Komponente. Ist $G = [a, b]$ dann ein Intervall, also u eine Kurve in $\mathbb{R}^m$, und schreiben wir q statt u und $\dot{q}$ statt $\partial q/\partial t$, und hängt L nicht von höheren Ableitungen als der ersten ab, so ergeben sich sich die

(1.9) **Lagrange-Gleichungen.** $\partial L/\partial q_i - \frac{\partial}{\partial t} \partial L/\partial \dot{q}_i = 0$.

Das Schöne der Formulierung der Mechanik durch solche Gleichungen der Variationsrechnung ist ihre koordinateninvariante Bedeutung. Im Allgemeinen ist (1.8) eine partielle Differentialgleichung für jede Komponente u.

Nun müssen wir aber etwas genauer hinschauen. Wir haben immer vorausgesetzt, dass alle Funktionen, die uns begegnen, so oft differenzierbar sind, wie es uns passt. Bei den Testfunktionen σ werden wir weiterhin voraussetzen, dass sie C^∞ sind. Wir können sie ja frei wählen. Aber die Funktionen $u \in \mathcal{X}$ sind in natürlicher Weise oft irgendwo unstetig oder haben zumindest unstetige Ableitungen, wie Wellen an ihren Fronten. Dann hat man in (1.8) eine partielle Differentialgleichung für u wie etwa $\partial^2/\partial x^2 u + \partial^2/\partial y^2 u - \partial^2/\partial t^2 u = 0$, aber man muss u betrachten, die gar nicht differenzierbar sind. Daher fragt man sich: Wie sind wir denn auf (1.8) gekommen? Nun, von (1.7), also hier hieße das

$$0 = \int_G (\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 - \partial^2 u/\partial t^2)\sigma \tag{1.10}$$

für alle Testfunktionen σ. Das G wäre hier etwa ein Zylinder mit Höhenfunktion t. Und wie sind wir auf eine Gleichung dieses Typs (1.7) gekommen? Nun, aus (1.6), wir haben die Ableitungen durch partielle Integration von σ nach u geschoben. Um aber (1.10) im Fall zu interpretieren, dass u nicht (genügend oft) differenzierbar ist, schieben wir eben alle partiellen Ableitungen wieder von u nach σ, denn σ ist ja nach Voraussetzung glatt. Man **definiert** also:

Ist T ein linearer Differentialoperator, d.h.

$$T(u) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\, \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} u, \tag{1.11}$$

so heisst die Funktion u eine **schwache Lösung** von $T(u) = 0$, wenn für jede Testfunktion σ gilt:

$$0 = \int_G T(u) \cdot \sigma := \int_G u \cdot T^*(\sigma). \tag{1.12}$$

Dabei wird T^* aus T gebildet, indem man durch formale partielle Integration den Operator auf die andere Seite schafft, also für T in (1.11) ist

$$T^*(\sigma) = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\, \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} \big(a_\alpha(x) \cdot \sigma\big). \tag{1.13}$$

Das Schöne ist, dass man sogar unstetige Funktionen auf diese Weise differenzieren kann, man will ja nur wissen, was $\int T(u) \cdot \sigma$ für Testfunktionen σ ist, und das ist $\int u \cdot T^*(\sigma)$. Die Verallgemeinerung von Lösungen $T(u) = 0$ zu schwachen Lösungen $\int_G uT^*(\sigma) = 0$ für alle Testfunktionen σ, ist wie wir gesehen haben, nach der Herleitung der Differentialgleichungen ganz natürlich.

Anwendung. Betrachte eine Membran, die am Rand von G eingespannt ist. Sei $u : G \to \mathbb{R}$ die Auslenkung aus der Ruhelage, $G \subset \mathbb{R}^3$. Die zuständige

Energiefunktion ist $u_x^2+u_y^2+u_z^2$, $u_x := \partial/\partial x\, u$ usw. Von der Euler-Gleichung bleibt nur:

$$\begin{array}{lcl} 0 & = & \partial/\partial x\, u_x + \partial/\partial y\, u_y + \partial/\partial z\, u_z, \text{ also} \\ \Delta u & := & (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)u \ = \ 0. \end{array}$$

Hier gibt es übrigens keine schwachen Lösungen die nicht echte (und analytische) Lösungen sind.

Anwendung. Eindimensionale Wellengleichung. Für Funktionen $u(s,t)$ auf $\mathbb{R}^2$ ist dies die Gleichung $\partial^2/\partial t^2 u - \partial^2/\partial s^2 u = 0$.

Schreibe $x = s+t$, $y = s-t$, dann folgt $\partial/\partial t = \partial/\partial x - \partial/\partial y$, $\partial/\partial s = \partial/\partial x + \partial/\partial y$, also $\partial/\partial x = 1/2(\partial/\partial t + \partial/\partial s)$, $\partial/\partial y = \frac{1}{2}(\partial/\partial s - \partial/\partial t)$ also $(\partial/\partial x\, \partial/\partial y) = \frac{1}{4}(\partial^2/\partial s^2 - \partial^2/\partial t^2)$, also kommen wir auf die Differentialgleichung

$$T(u) \ = \ \partial^2/\partial x\ \partial y\, u \ = \ 0.$$

Man sieht leicht, dass diese Gleichung die Lösung $f(x)+g(y)$ hat, für beliebiges f und g und in der Tat, sind f und g nur stetig, so ist dies auch die allgemeine schwache Lösung (Aufgabe). Wenn Sie eine Saite zupfen, ist die Gestalt der Saite auch tatsächlich nie differenzierbar.

2. Distributionen

Wenn es auch eine Funktion $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$, $\delta(0) = \infty$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\, dx = 1$ nicht gibt, so lässt sich doch diesem Wesen leicht ein wohlerklärter Sinn erteilen. Tatsächlich tritt nämlich schließlich δ nicht für sich auf, sondern es steckt in einem Integral, etwa

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\ \sigma(x)\, dx \ = \ \sigma(0).$$

Hier ist stets $dx = dx_1 \ldots dx_n$. Nichts ist leichter zu deuten, als die rechte Seite, wenn nur σ anständig ist. Das soll es in der Tat sein: Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

Definition. Eine **Testfunktion** $\sigma : G \to \mathbb{R}$ ist eine C^∞-Funktion mit kompaktem Träger. Der **Träger** von σ ist der Abschluss der Menge $\{x|\sigma(x) \neq 0\}$. Sei $\mathcal{D}$ der Vektorraum aller Testfunktionen mit folgender Topologie: Eine Folge (σ_n) in $\mathcal{D}$ **konvergiert in** $\mathcal{D}$ **gegen** σ, wenn gilt:

Es gibt eine kompakte Menge $K \subset G$, sodass σ und alle σ_n ausserhalb von K verschwinden, und $D^\alpha\sigma_n$ konvergiert gleichmäßig gegen $D^\alpha\sigma$ für alle Ableitungen $D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Eine **Distribution** auf G ist eine stetige Linearform $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Also T ist linear, und für $(\sigma_n) \to \sigma$ im obigen Sinne folgt $T\sigma_n \to T\sigma$.

(2.1) **Beispiele.** *(i) Sei f eine stetige (oder nur lokal Riemann-integrable) Funktion auf G. Dann definiert f die Distribution*

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R},\ \sigma \longmapsto \int\limits_G f(x)\ \sigma(x)\, dx \ =: \ \langle f, \sigma\rangle.$$

(ii) Ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multiindex, so ist auch

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R},\ \sigma \longmapsto \langle f, D^\alpha \sigma\rangle$$

eine Distribution.

(iii) $\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R},\ \sigma \longmapsto \sigma(p)$ $\big($oder $D^\alpha\sigma(p)\big)$ für festes $p \in G$.

Das Beispiel (iii), wie wir wissen, ist nicht von der Form (i), aber das Beispiel (i) ist gewissermaßen das Leitmuster, an dem man sich bei den Begriffsbildungen orientiert. Man bezeichnet daher insbesondere allgemein Distributionen wie Funktionen, etwa f, und die Anwendung von $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ auf $\sigma \in \mathcal{D}$ bezeichnet man meist nicht mit $f(\sigma)$ oder $\langle f, \sigma\rangle$, sondern mit

$$\int\limits_G f(x)\, \sigma(x)\, dx \ := \ \langle f, \sigma\rangle.$$

Das ist zunächst nur ein großer Aufwand an Buchstaben, aber er leitet uns zu den richtigen Definitionen. Zunächst

(2.2) **Bemerkung.** *Ist $C^0(G)$ der Raum der stetigen Funktionen auf G, so hat man eine lineare stetige Einbettung*

$$\imath \ : \ C^0(G) \hookrightarrow \mathcal{D}' \ = \ \textit{Raum der Distributionen}$$

in den Raum der Distributionen durch $f \mapsto \langle f, \cdot\rangle$. Stetig ist sie in dem Sinne, dass gilt: Ist $(f_n) \to f$ gleichmäßig konvergent und $\sigma \in \mathcal{D} \Rightarrow \langle f_n, \sigma\rangle \to \langle f, \sigma\rangle$. Dass $\imath$ eine Einbettung ist, bedeutet

$$\langle f, \sigma\rangle \ = \ 0 \ \textit{ für alle } \ \sigma \implies f \ = \ 0.$$

In der Tat: Ist $f(p) \neq 0$, so wähle Diracapproximationen d_ε um p für σ, dann folgt $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \langle f, d_\varepsilon\rangle = f(p) \neq 0$, also $\langle f, d_\varepsilon\rangle \neq 0$ für ein ε, also $f \neq 0$ als Distribution. Das erkläre ich gleich näher.

Wir fassen vermöge (2.2) Funktionen als spezielle Distributionen auf, und Distributionen als verallgemeinerte Funktionen. Beispiel (2.1, iii) liefert Distributionen, die keine Funktionen sind, insbesondere die δ-„Funktion“, als Distribution erklärt durch

$$\langle \delta, \sigma\rangle \ = \ \sigma(0). \tag{2.3}$$

Sie lässt sich allerdings durch stetige Funktionen approximieren: Sei etwa $d(x) \geq 0$, $\mathrm{Tr}(d) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$, und $\int d = 1$. Setze $d_a(x) = a^n \cdot d(ax)$, für $a > 0$. Dann ist $\mathrm{Tr}(d_a) \subset \{x \mid |x| \leq a^{-1}\}$ und immer noch $\int d_a = 1$. Ist nun σ stetig bei 0 und $|\sigma(x) - \sigma(0)| < \varepsilon$ für $|x| < a^{-1}$, so $|\int d_a(x)\sigma(x)dx - \sigma(0)| \leq \int d_a(x)|\sigma(x) - \sigma(0)| < \varepsilon$, also $d_a \to \delta$ im Raum $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Man nennt eine solche Funktionenfamilie $d_a, a \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{N}$, eine Dirac-Approximation. Für eine stetige Funktion f hat man damit $f(y) = \int f(x)\delta(y-x)dx$ wird approximiert durch $\int f(x)d_a(y-x)dx$, und dies hängt nur durch d_a von y ab, ist also glatt, wenn man d_a glatt wählt, ein Polynom wenn d_a eines ist . . .
Soweit ist das alles nicht überraschend, aber das Bemerkenswerte ist, dass man mit Distributionen auch Analysis treiben kann, ja, sie sind für partielle Differentialgleichungen eigentlich das Richtige: Gleich allgemein, wie wendet man einen linearen Differentialoperator

$$T \;=\; \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha(x) D^\alpha,\;\; a_\alpha \in C^\infty(G),$$

auf eine Distribution f an? Falls f eine C^∞-Funktion ist, sollte natürlich Tf im üblichen Sinne rauskommen, also

$$Tf \;:\; \sigma \;\longmapsto\; \langle Tf, \sigma\rangle$$

als Distribution. Aber die rechte Seite ist in diesem Fall auch anders zu schreiben, denn

$$\langle Tf, \sigma\rangle \;=\; \langle f, T^*\sigma\rangle.$$

Zum Beweis kann man annehmen, dass der Träger von σ in einem kompakten Würfel in G liegt, denn σ ist eine endliche Summe solcher Funktionen. Dann folgt die Formel durch partielle Integration.

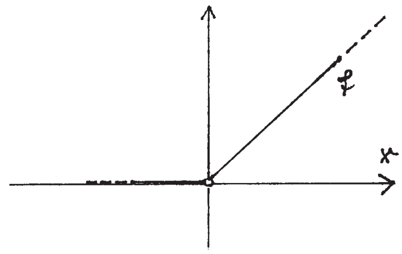
Wir definieren nun allgemein für eine Distribution f

$$\langle Tf, \sigma\rangle \;:=\; \langle f, T^*\sigma\rangle. \tag{2.4}$$

Die Topologie auf $\mathcal{D}$ ist gerade so erklärt, dass dies dann immer noch stetig, also wohldefiniert ist.

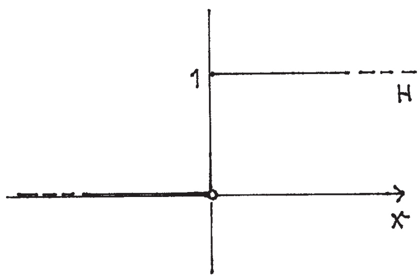
Jetzt können wir stetige Funktionen als Distributionen auffassen, und als solche können wir sie beliebig oft ableiten. Insbesondere ist es jetzt sinnvoll zu fragen, ob eine stetige (und nicht differenzierbare!) Funktion eine partielle Differentialgleichung löst, nämlich als Distribution.

Wir wollen, um uns an Rechnungen mit Distributionen zu gewöhnen, für $n = 1$ einige Ableitungen berechnen. Wir beginnen mit $f(x) = \max(0, x)$.



Dann ist $f'(x) = H(x)$ die **Heaviside**-Funktion, mit

$$H(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } \; x < 0 \\ 1 & \text{für } \; x \geq 0 \end{cases}$$



Beweis. $\langle f', \sigma \rangle \;:=\; -\langle f, \sigma' \rangle \;=\; -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\sigma'(x)\,dx \;=\; -\int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(x)\sigma'(x)}_{=0}\,dx \;-$ $\int_0^\infty f(x)\,\sigma'(x)\,dx \;\;=\;\; -\int_0^\infty x\,\sigma'(x) \;\;=\;\; -\underbrace{[x\sigma(x)]_0^\infty}_{=0} \;+\; \int_0^\infty \sigma(x)\,dx \;\;=$ $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x)\; H(x)\,dx = \langle H, \sigma \rangle$. Also $f' = H$.

Das ist ja noch ganz naheliegend, aber nun folgt

(2.5) $$H' \;=\; \delta.$$

Beweis. $\langle H', \sigma \rangle \;:=\; -\langle H, \sigma' \rangle \;=\; -\int_{-\infty}^{0} \underbrace{H(x)\sigma'(x)}_{=0}\,dx - \int_0^\infty H(x)\sigma'(x)\,dx \;=$ $-\int_0^\infty \sigma'(x) = [\sigma(x)]_\infty^0 = \sigma(0) = \langle \delta, \sigma \rangle$.

Natürlich können wir jetzt weiter ableiten, und erhalten

(2.6) $$\langle \delta^{[n]}, \sigma \rangle \;=\; (-)^n \sigma^{[n]}(0)$$

Manches Gewohnte muss man neu prüfen, zum Beispiel:

(2.7) **Bemerkung.** *Ist f eine Distribution auf R und $f' = 0$, so ist f eine Konstante c, das heisst $\langle f, \sigma \rangle = c \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x)\,dx$.*

Beweis. Wir haben $0 = -\langle f', \gamma \rangle := \langle f, \gamma' \rangle$ für alle $\gamma \in \mathcal{D}$. Wähle nun ein $\tau \in \mathcal{D}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} \tau(x)\,dx = 1$, und sei $\langle f, \tau \rangle = c$.

Behauptung: $\langle f, \sigma \rangle = c \int^{-\infty} \sigma(x)\,dx$ für alle σ. Nun:
Ist $\int \sigma(x)\,dx = a$, so $\int (\sigma - a\tau)\,dx = 0 \Rightarrow \sigma - a\tau = \gamma'$ für ein $\gamma \in \mathcal{D} \Rightarrow 0 = \langle f, \gamma' \rangle = \langle f, \sigma \rangle - a \underbrace{\langle f, \tau \rangle}_{c} = \langle f, \sigma \rangle - c \int \sigma(x)\,dx$. □

Es hat keinen Sinn, nach dem Wert einer Distribution f im Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ also nach $f(p)$ zu fragen, aber sinnvoll ist die **Definition**: Die Distribution f **verschwindet** in einer offenen Menge U, wenn $\langle f, \sigma \rangle = 0$ für alle σ mit Träger in U. Sei V die Vereinigung aller offenen Mengen U, sodass f in U verschwindet. Dann verschwindet f in V. In der Tat, ist σ eine Testfunktion mit Träger $K \subset V$, so wird K von offenen Mengen U_λ überdeckt, sodass f in U_λ verschwindet. Wähle eine untergeordnet Partition der 1

$$\sum_j \varphi_j \ = \ 1, \ \text{Träger } (\varphi_j) \subset U_\lambda \text{ für ein } \lambda.$$

Dann ist $\sigma = \sum \sigma_j$, $\sigma_j = \sigma \cdot \varphi_j$, und weil K kompakt und die Partition der Eins lokal endlich ist, ist dies eine endliche Summe. Dann ist $\langle f, \sigma \rangle = \sum_j \langle f, \sigma_j \rangle = 0$, weil Träger $(\sigma_j) \subset U_\lambda$ für ein λ.

Das Komplement dieser offenen Menge V heisst der **Träger von** f. Dieser Träger hat also folgende Bedeutung:

Ist $\sigma \in \mathcal{D}$ und ist der Träger von σ fremd zum Träger von f, so ist $\langle f, \sigma \rangle = 0$.

Beispiel. Der Träger von δ ist $\{0\}$, denn ist $\sigma(x) \neq 0$ nur für $x \neq 0$, so ist $\langle \delta, \sigma \rangle = \sigma(0) = 0$.

Der Träger von f' liegt im Träger von f, denn ist $\langle f, \sigma \rangle = 0$ für alle σ mit Träger in V, so auch $\langle f', \sigma \rangle = -\langle f, \sigma' \rangle = 0$ für alle σ mit Träger in V. Hat f einen kompakten Träger K, so kann man $\langle f, \sigma \rangle$ für beliebige C^∞-Funktionen $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erklären. Man wählt eine Testfunktion τ mit $\tau = 1$ auf einer Umgebung von K (großen Kugel), und setzt

$$\langle f, \sigma \rangle \ := \ \langle f, \tau \cdot \sigma \rangle.$$

Dies hängt nicht von der Wahl von τ ab, denn mit einer anderen Wahl τ_1 wird die Differenz $\langle f, (\tau - \tau_1) \cdot \sigma \rangle = 0$, weil $\tau - \tau_1$ einen Träger ausserhalb $K =$ Träger (f) hat.

Beispiel $\langle\delta,\sigma\rangle = \sigma(0)$ für alle C^∞-Funktionen σ.

Tatsächlich ist $\langle\delta, f\rangle := f(0)$ natürlich für beliebige Funktionen f definiert, nicht aber $\langle D^\alpha\delta, f\rangle$. Man kann Distributionen nicht sinnvoll multiplizieren, aber man kann eine Distribution f mit einer C^∞-Funktion g multiplizieren (Differentialoperator 0-ter Ordnung) durch

$$\langle g\cdot f,\sigma\rangle \;:=\; \langle f, g\cdot\sigma\rangle \text{ für } f\in\mathcal{D}',\ \sigma\in\mathcal{D},\ g\in C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.8}$$

Man kann Distributionen nicht mit beliebigen Transformationen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zusammensetzen, aber ist φ ein Diffeomorphismus, also $\det D\varphi \neq 0$, und f eine stetige Funktion, so hat man $\langle f\circ\varphi,\sigma\rangle = \int f\varphi(x)\cdot\sigma(x)\,dx = \int f\circ\varphi(x)\cdot\big(\sigma\circ\varphi^{-1})\circ\varphi(x)\big)\,dx = \int f\circ\varphi(x)\cdot\big[(\sigma\circ\varphi^{-1})\circ\varphi(x)/|(\det D\varphi)\circ\varphi^{-1}\varphi(x)|\big]\cdot|\det D\varphi(x)|dx = \int f(x)\cdot\sigma\varphi^{-1})/|\det(D\varphi)\circ\varphi^{-1}(x)|\,dx = \langle f|\sigma\circ\varphi^{-1}/|\det(D\varphi)\circ\varphi^{-1}|\rangle$.

Diese Gleichung kann man dann allgemein zur Definition erheben, z.B. ist $\varphi(a) = 0$, so ist

$$\begin{aligned}\langle\delta\circ\varphi,\sigma\rangle \;&=\; \sigma(a)/|\det(D\varphi)(a)|,\\ \delta(cx) = |c^{-1}|\cdot\delta(x),\ &\langle\delta(x-\xi)|\sigma(x)\rangle = \sigma(\xi).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Man braucht natürlich nur, dass φ ein Diffeomorphismus einer offenen Menge U mit einer Umgebung des Trägers von f ist. Soviel an allgemeinen Andeutungen über die Theorie der Distributionen.

Wann löst eine stetige Funktion $f(x,t)$ die Wellengleichung

$$\partial^2 f/\partial x^2 \;=\; \partial^2 f/\partial t^2$$

schwach? Setze $x = u+v,\ t = u-v$, also

$$\partial/\partial u \;=\; \partial/\partial x + \partial/\partial t,\ \partial/\partial v \;=\; \partial/\partial x - \partial/\partial t,$$

und folglich

$$\partial/\partial u\ \partial/\partial v \;=\; \partial^2/\partial x^2 \;-\; \partial^2/\partial t^2.$$

Wir haben also zu fragen: Welche stetigen Funktionen $f(u,v)$ lösen $\partial/\partial u\ \partial/\partial v\, f = 0$ auf $\mathbb{R}^2$? Jedenfalls natürlich die Funktionen der Gestalt

$$f(u,v) \;=\; \varphi(u) \;+\; \psi(v). \tag{2.10}$$

Auch können wir zu einer gegebenen Lösung f mit $f(0,0) = 0$ die φ,ψ so bestimmen, dass $f(u,0) = \varphi(u)$, $f(0,v) = \psi(v)$. Setzen wir dann $g(u,v) = f(u,v) - \varphi(u) - \psi(v)$, so löst g die Gleichung

$$\partial/\partial u\,\partial/\partial v\, g \;=\; 0, \quad g(u,0) \;=\; g(0,v) \;=\; 0.$$

Aber daraus folgt: $\partial/\partial v\, g$ hängt von u nicht ab(2.7), ist also 0, weil $g(0,v) = 0$, und daher hängt g von v nicht ab nach (2.7), ist also 0, weil $g(u,0) = 0$.

Damit haben wir:

(2.11) **Bemerkung.** *Alle stetigen schwachen Lösungen der Differentialgleichung* $\partial^2 f/\partial x^2 = \partial^2 f/\partial t^2$ *sind von der Gestalt* $f(x,t) = \varphi(x-t) + \psi(x+t)$ *für stetige Funktionen* φ, ψ *einer Variablen.*