Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 22.10.2018, 10:00 Uhr

Für jede Frage, begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel. Wir erinnern, dass zwei Aussagen P und Q *äquivalent* genannt werden falls P gilt genau dann, wenn Q gilt.

Aufgabe 1. Sei X eine Menge und seien $A, B \subset X$ zwei Teilmengen.

1) Sind die zwei folgenden Aussagen äquivalent?
   a) Für jedes $x \in X$, $x \notin A$ oder $x \in B$.
   b) Für jedes $x \in X$, ist $x \in A$, so folgt $x \in B$.
2) Sind die zwei folgenden Aussagen äquivalent?
   a) Für jedes $x \in X$, $x \notin A$ oder $x \in A$.
   b) Für jedes $x \in X$, falls $x \notin A$ nicht gilt, dann $x \in A$ gilt.
3) Sind die zwei folgenden Aussagen äquivalent?
   a) Es gibt eine Menge Y mit $A \times Y \subset B \times Y$.
   b) Es ist $A \subset B$.
4) Sind die zwei folgenden Aussagen äquivalent?
   a) Für jede Menge Y gilt $A \times Y \subset B \times Y$.
   b) Es ist $A \subset B$.

Aufgabe 2. Seien X, Y, Z drei Mengen. Falls $R \subset X \times Y$ und $S \subset Y \times Z$, definieren wir $S \circ R$ als die Teilmenge von $X \times Z$ deren Elemente sind die Paaren (x, z), so dass es ein y in Y gibt mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in S$.

1) Seien U noch eine Menge und $T \subset Z \times U$. Ist es wahr, dass $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$ gilt?
2) Wir nehmen an, dass es zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gibt, so dass R und S bzw. die Graphen von f und g sind. Zeigen Sie, dass $S \circ R$ den Graph von der Komposition von g und f ist.

Aufgabe 3. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Beweisen Sie jeden Aussage unten.

1) Falls f und g injektiv sind, dann ist $g \circ f$ injektiv auch.
2) Falls $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv auch.
3) Falls f und g surjektiv sind, dann ist $g \circ f$ surjektiv auch.
4) Falls $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv auch.

Aufgabe 4. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie jeden Aussage unten.

1) Die Abbildung f ist injektiv genau dann, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: für jede Menge A und jede Abbildungen $a, a' : A \to X$, falls $f \circ a = f \circ a'$ gilt, dann $a = a'$ gilt.
2) Die Abbildung f ist surjektiv genau dann, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: für jede Menge B und jede Abbildungen $b, b' : Y \to B$, falls $b \circ f = b' \circ f$ gilt, dann $b = b'$ gilt.

Bonusaufgabe (verallgemeinert Cantors Diagonalargument)**.** Sei A eine Menge und $f : A \to P(A)$ eine Abbildung, von A nach der Potenzmenge von A. Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv ist. *Hinweis*: zeigen Sie, dass die Teilmenge $B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ nicht im Bild von f ist.