Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan



Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 9.01.2019, 10:00 Uhr

**Aufgabe 1.** Sei $K$ ein Körper. Gibt es zweidimensionale Untervektoräume $U$ und $V$ von $K^3$, so dass die Gleichung

$$\dim U \cap V = 0$$

gilt?

**Aufgabe 2.** (diskrete Heisenberggruppe) Sei $K$ ein Körper. Sei $H \subset M_{3\times 3}(K)$ die Teilmenge deren Elemente sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $x, y, z \in K$.

a) Zeigen Sie, dass, für alle $A$ und $B$ in $H$, das Produkt $A \cdot B \in H$ ist.
b) Zeigen Sie, dass jede Element $A$ von $H$ invertierbar ist. Bestimmen Sie $A^{-1}$.

**Aufgabe 3.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sei

$$f = M(A) : \mathbf{Q}^4 \to \mathbf{Q}^3\,, \quad x \mapsto A \cdot x$$

die lineare Abbildung induziert durch $A$. Lösen Sie die folgenden Aufgaben mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker f$.
b) Für welche $x \in \mathbf{Q}^4$ gilt $f(x) = e_1$ (mit $(e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbf{Q}^3$)?

**Aufgabe 4.** Sei $K$ ein Körper. Seien $m, n \in \mathbf{N}$ und $A \in M_{m\times n}(K)$. Sei

$$f = M(A) : \mathbf{Q}^n \to \mathbf{Q}^m\,, \quad x \mapsto A \cdot x$$

die lineare Abbildung induziert durch $A$. Seien $r = \dim \operatorname{Im} f$ und $d = \dim \ker f$. Wir erinnern, dass es eine kurze exakte Sequenz

$$\{0\} \to \ker f \xrightarrow{i} K^n \xrightarrow{g} \operatorname{Im} f \to \{0\}$$

gibt, mit $i(x) = x$ für alle $x \in \ker f$ und $g(x) = f(x)$ für alle $x \in K^n$.

a) Zeigen Sie, dass es eine Basis $(w_1, \ldots, w_m)$ von $K^m$ gibt, so dass $(w_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von $\operatorname{Im} f$ ist.
b) Wir wahlen, für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$, ein Element $v_i \in K^n$ mit $f(v_i) = w_i$. Zeigen Sie, dass, für jede Basis $(u_1, \ldots, u_d)$ von $\ker f$, die Familie $(u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis von $K^n$ ist.
c) Zeigen Sie, dass es zwei invertierbare Matrizen $P \in M_{n\times n}(K)$ und $Q \in M_{m\times m}(K)$ gibt, so dass $Q^{-1} \cdot A \cdot P = (b_{ij})_{(i,j)\in\{1,\ldots m\}\times\{1\ldots n\}}$ mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \text{ und } i \leq r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Bonusaufgabe.** Sei $K$ ein Körper. Seien $V$ ein $K$-Vektorraum und $U \subset V$ ein $K$-Untervektorraum. Wir definieren eine Relation $R$ auf $V$ durch

$$xRy \Leftrightarrow x - y \in U\,.$$

Für jedes Element $x \in V$ ist $\bar{x}$ die Äquivalenzklass von $x$.

a) Zeigen Sie, dass $R$ eine Äquivalenz relation ist.
b) Zeigen Sie, dass die Addition, definiert durch $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$ (für alle $x, y$ in $V$), wohldefiniert auf $V/U$ ist. Zeigen Sie, dass die Skalarmultiplikation, definiert durch $\lambda \cdot \bar{x} = \overline{\lambda \cdot x}$ (für alle $\lambda \in K$ und $x \in V$), wohldefiniert auf $V/U$ ist.
c) Zeigen Sie, dass $V/U$, zusammen mit die Addition und Skalarmultiplikation oben, einen $K$-Vektorraum ist, so dass die kanonische Abbildung

$$p : V \longrightarrow V/U\,, \quad x \mapsto \bar{x}$$

$K$-lineare ist. Zeigen Sie, dass

$$\ker p = U$$

gilt.
d) Wir nehmen an, dass $V$ endlich erzeugt ist. Zeigen Sie, dass

$$\dim V = \dim U + \dim V/U$$

gilt.
e) Sei $f : V \longrightarrow W$ eine $K$-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} V/\ker f &\longrightarrow \operatorname{Im} f \\ \bar{x} &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

einen wohldefinierte Isomorphismus ist.