Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan

WS 2018-2019
Blatt 11

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 16.01.2019, 10:00 Uhr

**Aufgabe 1.** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und sei

$$f : M_{2\times 2}(\mathbf{Q}) \to M_{2\times 2}(\mathbf{Q})$$

die lineare Abbildung definiert durch $f(B) = A \cdot B$.

a) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$.
b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$.

*Hinweis:* Sie können eine Elementarmatrix $Z$ nehmen, und die Abbildung $g : M_{2\times 2}(\mathbf{Q}) \to M_{2\times 2}(\mathbf{Q})$ durch $g(C) = Z \cdot C$ definieren, so dass die Komposition $g \circ f$ einfacher wird.

**Aufgabe 2.** Sei $K$ ein Körper, und sei $f : V \to V$ eine $K$-lineare Abbildung. Wir nehmen an, dass $V$ endlich erzeugt ist, mit $n = \dim(V)$. Wir erinnern, dass, nach Satz 3.7.10 der Vorlesung, für jede Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von $V$, es genau eine $n \times n$-Matrix $M_B(f)$ gibt, so dass folgendes gibt: Für alle $v \in V$ und $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b_i \,,$$

ist

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot b_i$$

mit

$$M_B(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Sei $A$ eine $n \times n$-Matrix, und sei $B$ eine Basis von $V$. Zeigen Sie, dass folgendes gilt: Es gibt eine invertierbare $n \times n$-Matrix $S$ mit

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = M_B(f)$$

genau dann, wenn es eine Basis $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ von $V$ mit $M_{B'}(f) = A$ gibt.

**Aufgabe 3.** Sei $K$ ein Körper und sei $n$ eine natürlische Zahl.

a) Zeigen Sie, dass $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$ gilt für alle $n \times n$-Matrix $A$ und alle $\lambda \in K$.
b) Zeigen Sie, dass $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ für alle $n \times n$-Matrix $B$ gilt genau dann, wenn $n \leq 1$ ist.

**Aufgabe 4.** Sei $K$ ein Körper und seien $m, n$ zwei natürlische Zahlen. Seien $A \in M_{m\times m}(K)$, $B \in M_{n\times n}(K)$, und $C \in M_{m\times n}(K)$. Wir definieren

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{(m+n)\times(m+n)}(K)$$

als die Matrix, die angegeben aus den Blöcken A, B, C zusammengesetzt ist. Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$

gilt. *Hinweis:* Berechnen Sie induktiv über $m$, falls $A = I_m$. Beobachten Sie dann, dass die Abbildung

$$A \mapsto \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

alternierend und $m$-linare ist (auch induktiv über $m$).

**Bonusaufgabe.** Sei $K = \mathbf{F}_2$ der Körper mit genau zwei Elemente. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $GL_n(K)$ für jede $n \in \mathbf{N}$. *Hinweis*: Wieviele Basen hat $K^n$?