Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan

WS 2018-2019
Blatt 12

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 23.01.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, und seien a, b, c in K. Wir definieren eine lineare Abbildung $f : K^3 \to K^3$ durch $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + a \cdot x_2, x_2 + b \cdot x_3, x_3 + c \cdot x_1)$. Bestimmen Sie die Determinant von f. Für welche Tripeln (a, b, c) ist f bijektiv?

Aufgabe 2. Seien $a, b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ die Funktionnen definiert durch

$$a(x) = e^{2\cdot x} \quad \text{und} \quad b(x) = x \cdot e^{2\cdot x}$$

für alle $x \in \mathbf{R}$. Sei $E = Span_{\mathbf{R}}(\{a, b\}) \subset Abb(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

a) Zeigen sie, dass (a, b) eine Basis von E ist.
b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} D\colon E &\to E \\ \varphi &\mapsto D(\varphi) = \varphi' \end{aligned}$$

einen wohldefiniert Endomorphismus von E ist (mit φ' die Ableitungsfunktion von φ). Bestimmen Sie die Matrix von D relativ der Basis (a, b). Berechnen Sie $D^n = \underbrace{D \cdot \cdots \cdot D}_{n\text{-mal}}$ für alle $n > 0$.

c) Sei f die Funktion definiert durch $f(x) = (3 \cdot x + 1) \cdot e^{2\cdot x}$. Berechnen Sie die n-te Ableitung von f für alle $n \in \mathbf{N}$.
d) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f \in E$ eine Stammfunktion hat (das heißt, dass, für jede f in E, es eine Funktion F mit $F' = f$ gibt).

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $n > 0$ eine natürlische Zahl. Zeigen Sie, dass eine $n \times n$-Matrix A invertierbar ist genau dann, wenn die transponierte Matrix zu A invertierbar ist. *Hinweis. Benützen sie, dass die Abbildung*

$$\begin{aligned} M_{n\times n}(K) &\to M_{n\times n}(K) \\ B &\mapsto B^T \end{aligned}$$

vereinbar mit der Multiplikation ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und $n > 0$ eine natürlische Zahl.

a) Zeigen Sie, dass die Determinant von $n \times n$-Matrizen auch linear in den Spalten ist. *Hinweis:* Benützen Sie die Cramersche Regel.
b) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(A^T)$ gilt. (Wir erinneren, dass A^T die tranponierte Matrix ist.)

Bonusaufgabe. Sei $\mathbf{R}$ der Körper von reellen Zahlen. Sei V ein endlich erzeugter $\mathbf{R}$-Vektorraum von Dimension $n > 0$. Für jede Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ schreiben wir $i_B : \mathbf{R}^n \to V$ für den Isomorphismus, so dass $i_B(e_i) = b_i$ für alle i gilt. Falls $C = (c_1, \ldots, c_n)$ gibt es genau eine $n \times n$-Matrix $T_{B,C}$, so dass $T_{B,C} \cdot x = i_C^{-1}(i_B(x))$ für jedes $x \in V$ gilt.

Wir definieren wie folgt eine Relation $\sim$ auf der Menge von Basen von V: $B \sim C$ gilt genau dann, wenn $\det(T_{B,C}) > 0$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklassen von Basen von V bezüglich $\sim$ bezeichnet man als *Orientierungen* von V.
b) Sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbf{R}^3$. Zeigen Sie, dass (e_1, e_2, e_3) und (e_2, e_1, e_3) verschiedene Orientierungen von $\mathbf{R}^n$ repräsentieren.
c) Zeigen Sie, dass V genau zwei Orientierungen besitzt.