Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan

WS 2018-2019
Blatt 13

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 30.01.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 1. Seien $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ mit $a \neq 0$, und sei $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ die induzierte Polynomfunktion. Zeigen Sie, dass es eine reele Zahl x gibt, so dass $f(x) = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in M_{3\times 3}(K)$ mindestens einen Eigenwert über $\mathbf{R}$ hat.

Aufgabe 2. Was ist das Spektrum der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbf{C}$? Erklären Sie, warum A diagonalisierbar ist, und geben Sie eine Basis von Eigenvektoren über $\mathbf{C}$. Zeigen Sie, dass, für jede invertierbare Matrix $S \in GL_3(\mathbf{C})$ und jede natürliche Zahl n gilt

$$S^{-1} \cdot A^n \cdot S = (S^{-1} \cdot A \cdot S)^n .$$

Bestimmen Sie A^n für alle $n \in \mathbf{N}$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbf{N}$. Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ heißt *absolut diagonalisierbar*, wenn, für jedes $S \in GL_n(K)$, die Matrix $S^{-1}.A.S$ eine Diagonalmatrix ist. Zeigen Sie, dass $\lambda \cdot I_n$ für jedes $\lambda \in K$ absolut diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie alle absolut diagonalisierbaren Matrizen.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Zeigen Sie induktiv über n, dass, für jede natürliche Zahl n

$$(X - 1) \cdot (X^n + \cdots + X + 1) = X^{n+1} - 1$$

in $K[X]$ gilt. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektoraum V. Zeigen Sie, dass es genau eine K-lineare abbildung

$$\varphi : k[X] \to \mathcal{L}(V, V)$$

gibt, so dass die zwei folgenden Eigenschaften gelten:

a) Es ist $\varphi(X) = f$.
b) Für alle P, Q in $K[X]$ guilt $\varphi(P) \circ \varphi(Q) = \varphi(P \cdot Q)$.

Zeigen Sie, dass

$$(f - 1) \circ (f^n + \cdots + f + 1) = f^{n+1} - 1$$

gilt.

Bonusaufgabe. Sei K ein Körper und sei A eine 2×2-Matrix mit Koeffizienten in $\mathbf{C}$, die nicht diagonalisierbar ist.

a) Zeigen Sie, dass A genau einen Eigenwert $\lambda \in \mathbf{C}$ hat.
b) Zeigen Sie, dass $(A - \lambda \cdot I_2)^2 = 0$ gilt.
c) Zeigen Sie, dass es eine kurze exakte Sequenz

$$\{0\} \to \ker(L(A - \lambda)) \xrightarrow{i} \mathbf{C}^2 \xrightarrow{f} \ker(L(A - \lambda)) \to \{0\}$$

mit i die Inklusionsabbildung und f definiert durch $f(x) = A \cdot x - \lambda \cdot x$ gibt. *Hinweis:* zeigen Sie, dass $\ker(L(A - \lambda))$ 1-dimensional ist; dann zeigen Sie, dass f nicht null ist.

d) Zeigen Sie, dass es eine invertierbare 2×2-Matrix S gibt, so dass

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

gilt. *Hinweis:* Für irgendwelchen Eigenvektor v wählen Sie w mit $f(w) = v$; zeigen Sie, dass (v, w) eine Basis von $\mathbf{C}^2$ ist.