Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan

WS 2018-2019
Blatt 14

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
freiwillig Abgabe: 06.02.2019

**Aufgabe 1.** Wir erinneren, dass, für jede $z = a + i \cdot b \in \mathbf{C}$, mit $a, b \in \mathbf{R}$, $\bar{z} = a - i \cdot b$ gilt. Sei $\varphi : \mathbf{C}^2 \to M_{2\times 2}(\mathbf{C})$ die Abbildung definiert durch

$$\varphi(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathbf{H}$ das Bild von $\varphi$. Die Elemente von $\mathbf{H}$ heißen die *Quaternionen*.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi$ injektiv und $\mathbf{R}$-linear ist. Zeigen Sie, dass $\varphi$ keine $\mathbf{C}$-lineare Abbildung ist.

b) Es ist $\mathbf{1} = \varphi(1, 0)$, $\mathbf{i} = \varphi(i, 0)$, $\mathbf{j} = \varphi(0, 1)$, und $\mathbf{k} = \varphi(0, i)$. Zeigen Sie, dass $(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ eine Basis von $\mathbf{H}$ über $\mathbf{R}$ ist. Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{1}$$

gilt.

c) Seien $q, q' \in \mathbf{H} \subset M_{2\times 2}(\mathbf{C})$. Zeigen Sie, dass $q \cdot q'$ eine Quaternion ist.

d) Zeigen Sie, dass $\det \varphi(z_1, z_2) = 0$ gilt genau dann, wenn $z_1 = z_2 = 0$ gilt. Sei $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ und sei $q = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$. Berechnen Sie $q^{-1}$.

e) Erklären Sie, warum $\mathbf{H}$ kein Körper ist.

**Aufgabe 2.** Sei $(e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbf{R}^3$, und sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie den Rang von $A$.

b) Zeigen Sie, dass $(A \cdot e_1, A \cdot e_2, A \cdot e_3)$ eine Basis von $\mathbf{R}^3$ ist.

c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $A$.

d) Was ist die Dimension von $Eig_\lambda(A)$ für jede $\lambda \in \sigma_{\mathbf{R}}(A)$? Finden Sie eine Basis von Eigenvektoren in $\mathbf{R}^3$.

e) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $P$ zusammen mit einer Diagonalmatrix $D$, so dass

$$P^{-1} \cdot D \cdot P = A$$

gilt.

**Aufgabe 3.** Sei $K$ ein Körper. Sei $n > 0$ eine positive natürlische Zahl, und seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$. Wir definieren das Polymom $P$ durch

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot X^i = X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \cdots + a_0 \,.$$

Es ist die folgende $n \times n$-Matrix, die man als *Begleitmatrix zu P* bezeichnet:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von $A$ genau $P$ ist:

$$\chi_A = \det(X \cdot I_n - A) = P$$

*Hinweis.* Dies lässt sich bequem per vollständiger Induktion über zeigen.

**Aufgabe 4.** Sei $K$ ein Körper, sei $n > 0$ eine positive natürliche Zahl, und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

a) Die Matrix $A$ ist diagonalisierbar.
b) Es gilt

$$\chi_A = \prod_{\lambda\in\sigma_K(A)} (X-\lambda)^{\dim Eig_\lambda(A)}$$

(Für jede endliche Menge $I$ ist das Produkt von einer Familie von Polynome $(P_i)_{i\in I}$ definiert induktiv durch

$$\prod_{i\in I} P_i = P_j \cdot \prod_{i\in I\setminus\{j\}} P_i$$

für alle $j \in I$.)