Universität Regensburg WS 2018-2019
Fakultät für Mathematik Blatt 2
Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 31.10.2018, 10:00 Uhr

Für jede Frage, begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel.

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie die zwei folgenden Aussagen.

a) Für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt $A \subset f^{-1}(f(A))$.
b) Für jede Teilmenge $B \subset Y$ gilt $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Aufgabe 2. Sei M eine Menge und $T \subset M$ eine Teilmenge. Das *Komplement von T in M* ist die Teilmenge

$$M \setminus T = \{x \in M \mid x \notin T\} .$$

(Falls T das Urbild von 0 durch einer Abbildung $p : M \to \{0, 1\}$ ist, dann gilt $M \setminus T = p^{-1}(1)$.)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sind die folgenden Aussagen richtig?

a) Für jede Teilmenge $A \subset X$, gilt $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$.
b) Für jede Teilmenge $B \subset Y$, gilt $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$.

Aufgabe 3. Seien X, Y zwei Megen. Wir sagen, dass eine Menge P, zusammen mit zwei Abbildungen $p : P \to X$ und $q : P \to Y$, die *universelle Eigenschaft dem kartesischen Produkt von X und Y* erfüllt, wenn folgendes gilt: für jede Menge Z und alle Abbildungen $f : Z \to X$ und $g : Z \to Y$, gibt es genau eine Abbildung $\varphi : Z \to P$ mit $p \circ \varphi = f$ und $q \circ \varphi = g$.

a) Zeigen Sie, dass $X \times Y$, zusammen mit den zwei kanonischen Abbildungen

$$pr_1 : X \times Y \to X \quad \text{und} \quad pr_2 : X \times Y \to Y$$

die durch $pr_1(x, y) = x$ und $pr_2(x, y) = y$ definiert sind, die universelle Eigenschaft dem kartesischen Produkt von X und Y erfüllt. Beschreiben Sie die Identität von $X \times Y$ benützend die universelle Eigenschaft dem kartesischen Produkt von X und Y.

b) Sei P eine Menge zusammen mit Abbildungen $p : P \to X$ und $q : P \to Y$, die die universelle Eigenschaft dem kartesischen Produkt von X und Y erfüllt. Zeigen Sie, dass es genau eine Abbildung $f : P \to X \times Y$ gibt, so dass $pr_1 \circ f = p$ und $pr_2 \circ f = q$ gelten. Zeigen Sie, dass die Abbildung f bijektive ist. *Hinweis:* beide P und $X \times Y$ erfüllen die universelle Eigenschaft dem kartesischen Produkt von X und Y.

Aufgabe 4. Seien X und Y zwei Mengen, und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie Teilmengen von X, mit

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X .$$

Wir nehmen an, dass es eine Abbildung $f_i : A_i \to Y$ für jedes $i \in I$ gibt, mit der Eigenschaft, dass die Gleichung von Abbildungen

$$f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}$$

für alle $i, j \in I$ gilt. Zeigen Sie, dass es genau eine Abbildung $f : X \to Y$ gibt, so dass $f|_{A_i} = f_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Bonusaufgabe (Der Satz von Schröder-Bernstein)**.** Seien X und Y zwei Mengen. Wir nehmen an, dass es zwei injektive Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt. Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass eine bijektive Abbildung von X nach Y existiert.

a) Eine Abbildung $h : P(X) \to P(X)$ heißt *monoton wachsend*, wenn, für alle Teilmengen A und B von X mit $A \subset B$, gilt $h(A) \subset h(B)$. Sei h eine solche Abbildung. Wir setzen ein T als die Vereinigung alle Teilmengen A von X mit $A \subset h(A)$. Zeigen Sie, dass $h(T) = T$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $h : P(X) \to P(X)$ definiert durch

$$h(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$$

monoton wachsend ist.

c) Zeigen Sie, dass eine bijektive Abbildung von X nach Y existiert.