Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan

WS 2018-2019
Blatt 3

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 7.11.2018, 10:00 Uhr

Die Menge von natürlichen Zahlen heißt $\mathbf{N}$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für jede natürlische Zahl m es eine Abbildung

$$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$$
$$n \mapsto m + n$$

mit $m + 0 = m$ und $m + (n + 1) = (m + n) + 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$ gibt. Zeigen Sie, dass die zwei folgenden Eigenschaften gelten:

a) Für alle natürlischen Zahlen m und n, $m + n = n + m$ gilt;
b) Für alle natürlischen Zahlen m, n und p, $(m + n) + p = m + (n + p)$ gilt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass für jede natürlische Zahl m es eine Abbildung

$$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$$
$$n \mapsto m.n$$

mit $m.0 = 0$ und $m.(n + 1) = (m.n) + m$ gibt. Zeigen Sie, dass die zwei folgenden Eigenschaften gelten:

a) Für alle natürlischen Zahlen m und n, $m.n = n.m$ gilt;
b) Für alle natürlischen Zahlen m, n und p, $(m.n).p = m.(n.p)$ gilt.
c) Für alle natürlischen Zahlen m, n und p, $(m + n).p = m.p + n.p$ gilt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für jede natürlische Zahl m es eine Abbildung

$$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$$
$$n \mapsto m^n$$

mit $m^0 = 1$ und $m^{n+1} = m^n.m$ gibt. Zeigen Sie, dass, für alle natürlischen Zahlen m, n und p, $m^{n+p} = m^n.m^p$ gilt.

Aufgabe 4. Seien X und Y zwei endlichen Menge.

a) Zeigen Sie, dass, für alle Teilmengen $A, B \subset X$,
$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$
gilt.
b) Zeigen Sie, dass
$$|X \times Y| = |X|.|Y|$$
gilt.
c) Zeigen Sie, dass
$$|X^Y| = |X|^{|Y|}$$
gilt.

Bonusaufgabe.

Definition (Dedekind)**.** Eine Menge X ist *unendlich* falls es eine Teilmenge $A \subset X$ gibt, mit:

1) $A \neq X$ (also, es existiert $x \in X$ mit $x \notin A$);
2) $A \cong X$ (also, es gibt eine bijektive Abbildung von A nach X).

Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass eine Menge nicht unendlich ist genau dann, wenn sie endlich ist.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbf{N}$ von natürlichen Zahlen unendlich ist.
b) Zeigen Sie, dass endlichen Mengen nicht unendlich sind. *Hinweis:* wir können eine Induktion auf der Mächtigkeit von endlichen Mengen machen.

Sei X eine Menge, die unendlich ist. Wir wahlen eine Teilmenge $A \subset X$ mit einem Element $x_0 \in X \setminus A$, zusammen mit einer bijektiven Abbildung $f : X \to A$. Wir definieren eine Abbildung $g : X \to X$ durch $g(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.

c) Zeigen Sie, dass es genau eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &\to X \\ n &\mapsto g^n(x_0) \end{aligned}$$

gibt, so dass $g^0(x_0) = x_0$ und $g^{n+1}(x_0) = g(g^n(x_0))$ für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt.

d) Zeigen Sie, dass, für jede natürlische Zahl n,

$$g^{n+1}(x_0) \notin \{x, g(x_0), \ldots, g^n(x_0)\}$$

gilt. (Die Menge $\{x, g(x_0), \ldots, g^n(x_0)\}$ ist das Bild von $\{0, \ldots, n\}$ durch die Abbildung $i \mapsto g^i(x_0)$.)

e) Zeigen Sie, dass die Abbildung $i \mapsto g^i(x_0)$ eine Injektion von $\mathbf{N}$ nach X ist.

f) Zeigen Sie, dass X nicht endlich ist.