Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan

WS 2018-2019
Blatt 4

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 14.11.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 1. Wir definieren eine Relation $\leq$ auf der Menge von natürlichen Zahlen mit:

$$m \leq n \text{ genau dann, wenn es existiert eine } k \in \mathbf{N} \text{ mit } n = m + k\,.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

a) $n \leq n$ für alle $n \in \mathbf{N}$;
b) für alle m, n, p in $\mathbf{N}$, falls $m \leq n$ und $n \leq p$ gelten, so gilt $m \leq p$;
c) für alle m, n in $\mathbf{N}$, falls $m \leq n$ und $n \leq m$ gelten, dann ist $m = n$.

Seien X und Y zwei endlichen Mengen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1) Es gibt eine injektive Abbildung von X nach Y genau dann, wenn $|X| \leq |Y|$ gilt.
2) Es gibt eine surjektive Abbildung von X nach Y genau dann, wenn $|Y| \leq |X|$ gilt.

Aufgabe 2. Sei X eine Menge und sei R eine Äquivalenzrelation auf X. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in X$, $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \varnothing$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $f : X \to Y$ eine surjektive Abbildung, und sei $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Wir nehmen an, dass, für alle Elemente x und y von X, xRy gilt genau dann, wenn $f(x) = f(y)$ gilt. Zeigen Sie, dass es genau eine bijektive Abbildung $\varphi : X/R \to Y$ mit $\varphi([x]) = f(x)$ für alle $x \in X$ gibt.

Aufgabe 4. Sei A eine endliche Menge und $(x_a)_{a\in A}$ eine Familie von ganzen Zahlen. Wir definieren $\sum_{a\in A} x_a$ durch

$$\sum_{a\in A} x_a = 0 \text{ falls } A = \varnothing \text{ und } \sum_{a\in A} x_a = x_{a_0} + \sum_{b\in B} x_b \text{ für alle } B \subset A \text{ mit } |B| + 1 = |A| \text{ und } a_0 \in A \setminus B \text{ sonst.}$$

Zeigen Sie, dass diese Operation wohldefiniert ist. *Hinweis*: Sei E die Menge von natürlischen Zahlen n, so dass $\sum_{a\in A} x_a$ für jede Familie von ganzen Zahlen $(x_a)_{a\in A}$ indexiert durch einer endlichen Menge A mit $|A| = n$ wohldefiniert ist. Zeigen Sie, dass $0 \in E$ gilt und, dass, für jede $n \in E$, $n + 1 \in E$ gilt.

Sei $f : X \to Y$ eine surjektive Abbildung zwischen endlichen Mengen. Zeigen Sie, dass

$$|X| = \sum_{y\in Y} |f^{-1}(y)|$$

gilt.

Bonusaufgabe. Für eine natürliche Zahl n definieren wir $n!$ mit:

$$0! = 1 \text{ und } (n + 1)! = n! \cdot (n + 1) \text{ für } n \in \mathbf{N}.$$

Sei $\mathfrak{S}_n = S(\{1, \ldots, n\})$ die Gruppe von bijektiven Abbildungen $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass

$$|\mathfrak{S}_n| = n!$$

gilt.