UNIVERSITÄT REGENSBURG
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan

WS 2018-2019
Blatt 5

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 21.11.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 1. Sei X eine Menge mit Potenzmenge $P(X)$. Für zwei Teilmengen $A, B \subset X$ definieren wir $A+B$ durch

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

Zeigen Sie, dass $(P(X), +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\varnothing$ ist.

Aufgabe 2. Sei $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$ mit seiner gewöhnlichen Abelschegruppestruktur (also, $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ und $0 + 1 = 1 + 0 = 1$). Sei X eine Menge. Für zwei Abbildungen $f : X \to \mathbf{F}_2$ und $g : X \to \mathbf{F}_2$ definieren wir $f + g : X \to \mathbf{F}_2$ durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $((\mathbf{F}_2)^X, +)$ eine abelsche Gruppe ist.
b) Mit der Notation von Aufgabe 1, zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(1) + g^{-1}(1) = (f + g)^{-1}(1)$$

für alle $f, g \in (\mathbf{F}_2)^X$ gilt.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und sei $a \in K$, so dass die Gleichung

$$x^2 = a$$

nicht mit $x \in K$ lösbar ist (z.B. $K = \mathbf{Q}$ mit $a = 2$, oder $K = \mathbf{R}$ mit $a = -1$).

Für $x, y \in K$ schreiben wir $x + \sqrt{a} \cdot y$ für das Paar $(x, y) \in K \times K$. Wir definieren die folgenden Operationen:

$$(x + \sqrt{a} \cdot y) + (x' + \sqrt{a} \cdot y') = (x + x') + \sqrt{a} \cdot (y + y')$$
$$(x + \sqrt{a} \cdot y) \cdot (x' + \sqrt{a} \cdot y') = (x \cdot x' + a \cdot y \cdot y') + \sqrt{a} \cdot (x \cdot y' + x' \cdot y)$$

für alle $x, x', y, y' \in K$. Zeigen Sie, dass $(K \times K, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Wir definieren die folgenden Operationen auf $K \times K$:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$(x, y) \cdot (x', y') = (x \cdot x', y \cdot y')$$

für alle $x, x', y, y' \in K$. Zeigen Sie, dass $(K \times K, +, \cdot)$ kein Körper ist.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, dass es einen Körper gibt, der genau vier Elemente enthält.
Hinweis. Die Charakteristik eines solchen Körpers ist 2 (das heißt, dass $1 + 1 = 0$ gilt). Versuchen Sie, Schritt für Schritt die Verknüpfungstabellen für Addition bzw. Multiplikation zu füllen. Beginnen Sie mit den Teilen, die direkt aus den Axiomen folgen, und hangeln Sie sich dann vorwärts, um einen geeigneten Kandidaten zu finden. Beim Aufschreiben der Lösung sollten Sie jedoch umgekehrt vorgehen: Präsentieren Sie Ihre fertigen Verknüpfungstabellen und begründen Sie dann, warum diese tatsächlich die Körperaxiome erfüllen.