Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 28.11.2018, 10:00 Uhr

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &\to \mathbf{F}_2 \\ x &\mapsto x^2 = x \cdot x \end{aligned}$$

$\mathbf{F}_2$-linear ist.

Aufgabe 2. Seien U, V, W drei K-Vektorräume.

a) Zeigen Sie, dass $U \times V$ auf natürliche Weise ein K-Vektorraum ist, so dass die Abbildungen $U \times V \to U$, $(x, y) \mapsto x$ und $U \times V \to V$, $(x, y) \mapsto y$, K-linear sind.
b) Seien $f : U \to W$ und $g : V \to W$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass es genau eine K-lineare Abbildung $h : U \times V \to W$ mit $h(x, 0) = f(x)$ für alle $x \in U$ und $h(0, y) = g(y)$ für alle $y \in V$ gibt.

Aufgabe 3. Sei X eine Menge. Wir definieren $K^{(X)}$ als die Teilmenge von K^X deren Elemente die Abbildungen $f : X \to K$ sind, für welche die Menge $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass $K^{(X)}$ ein K-Untervektorraum von K^X ist.
Für jedes Element x von X definieren wir die Abbildung $\underline{x} : X \to K$ durch

$$\underline{x}(y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y = x \text{ gilt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass, für jede Abbildung $f : X \to V$, es genau eine K-lineare Abbildung $\varphi : K^{(X)} \to V$ mit $\varphi(\underline{x}) = f(x)$ für alle $x \in X$ gibt.

Aufgabe 4. Zu $n \in \mathbf{N}$ definieren wir das *n-Simplex* Δ^n durch

$$\Delta^n = \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \,\middle|\, x_i \geq 0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n+1\} \text{ und } \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}.$$

a) Skizzieren Sie $\Delta^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ für $n = 0, 1, 2, 3$.
b) Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbf{N}$, so gibt es Vektoren $v_0, \ldots, v_n \in \mathbf{R}^{n+1}$ mit

$$\Delta^n \subset v_0 + Span_{\mathbf{R}}(\{v_1, \ldots, v_n\})$$

wobei $v_0 + E = \{v_0 + x \mid x \in E\}$ für jede Teilmenge $E \subset \mathbf{R}^{n+1}$, und $Span_{\mathbf{R}}(\{v_1, \ldots, v_n\})$ die Menge aller Linearkombinationen der $(v_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ ist.

Bonusaufgabe. Seien U, V, W drei K-Vektorräume. Konstruktieren Sie eine bijektive K-lineare Abbildung von $\mathcal{L}(U \times V, W)$ nach $\mathcal{L}(U, W) \times \mathcal{L}(V, W)$ (mit $\mathcal{L}(E, F)$ der K-Vektorraum aller K-linearen Abbildungen von E nach F).