Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan

WS 2018-2019
Blatt 7

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 05.12.2018, 10:00 Uhr

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Sei V ein K-Vektorraum. Wir beobachten, dass jede Teimenge $E \subset V$ insbesondere eine Familie in V definiert, nämlich die Familie $(v)_{v\in E}$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? (Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel.)

a) Ist $E \subset V$ ein Erzeugendensystem von V, so ist jede Teilmenge von E auch ein Erzeugendensystem von V.
b) Ist $E \subset V$ eine linear unabhängige Familie, so ist jede Teilmenge von E auch linear unabhängig.

Aufgabe 2. Sei I eine Menge. Sei $K^{(I)}$ der K-Untervektorraum von K^I deren Elemente sind die Familien $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I}$ in K, für welche die Menge $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ endlich ist. Fur jedes $i \in I$, definieren wir $e_i \in K^{(I)}$ durch

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Familie $(e_i)_{i\in I}$ eine Basis von $K^{(I)}$ ist.

Aufgabe 3. Sei I eine Menge. Wir behalten die Notationen von Aufgabe 2 oben. Sei V ein K-Vektorraum und sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in V indexiert durch die Menge I. Wir erinneren, dass es genau eine lineare Abbildung

$$f : K^{(I)} \to V$$

mit $f(e_i) = v_i$ für alle $i \in I$ gibt (Aufgabe 3 von Blatt 6).

a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung f surjektiv ist, genau dann, wenn die Familie $(v_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von V ist.
b) Zeigen Sie, dass f injektive ist, genau dann, wenn die Familie $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 4. Seien $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ die Mengen der rationalen Zahlen bzw. reellen Zahlen. Sei $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ und sei $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass β genau dann irrational ist (d.h. $\beta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$), wenn die Familie (α, β) im $\mathbf{Q}$-Vektorraum $\mathbf{R}$ linear unabhängig ist.

Bonusaufgabe. Wir erinneren, dass eine Abbildung $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine *Polynomfunktion* ist, wenn es $n \in \mathbf{N}$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ gibt mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \quad \text{für alle } x \in \mathbf{R}.$$

Sei $\mathrm{Poly}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ die Menge von Polynomfunktionen. Zu $n \in \mathbf{N}$ betrachten wir m_n die Polynomfunktion

$$\begin{aligned} m_n : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Poly}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ein $\mathbf{R}$-Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ ist, und dass die Familie $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Basis von $\mathrm{Poly}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ist. *Hinweis:* für die Unabhängigkeit kann es nützlich sein, Methoden von der Analysis zu verwenden.