UNIVERSITÄT REGENSBURG
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan

WS 2018-2019
Blatt 8

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 12.12.2018, 10:00 Uhr

**Aufgabe 1.** Sei $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elemente. Zeigen Sie, dass es keinen $\mathbf{F}_2$-Vektorraum mit $1536$ Elemente gibt.

**Aufgabe 2.** Sei $U$ die Teilmenge von $\mathbf{R}^3$ definiert durch:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U \quad \text{genau dann, wenn } x_1 = 2 \cdot x_2 + x_3 \text{ gilt.}$$

Zeigen Sie, dass $U$ ein $\mathbf{R}$-Untervektorraum von $\mathbf{R}^3$ ist. Finden Sie eine Basis von $U$.

**Aufgabe 3.** Sei $K$ ein Körper. Seien $m, n \in \mathbf{N}$ und sei $f : K^m \to K^n$ eine $K$-lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass, falls $f$ surjektiv ist, $m \geq n$ gilt.
2. Ist es wahr, dass, falls $m \geq n$ gilt, die Abbildung $f$ immer surjektiv ist?

**Aufgabe 4.** Sei $K$ ein Körper. Sei $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraum und sei $U \subset V$ ein $K$-Untervektorraum. Zeigen Sie, dass $U \neq V$ gilt genau dann, wenn $\dim U \neq \dim V$ gilt.

**Bonusaufgabe.** Sei $L$ ein Körper, und sei $K \subset L$ ein Teilkörper.

1. Zeigen Sie, dass jeder $L$-Vektorraum eine natürlische Struktur von $K$-Vektorraum hat.
2. Wir nehmen an, dass $L$ endlich erzeugt als $K$-Vektorraum ist. Sei $d$ die Dimension von $L$ als $K$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass jeder endlich erzeugte $L$-Vektorraum $V$ endlich erzeugt als $K$-Vektorraum ist. Zeigen Sie, dass die Dimension von $V$ als $K$-Vektorraum $d$ mal die Dimension von $V$ als $L$-Vektorraum ist.