Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Denis-Charles Cisinski/Dr. Adeel Khan

WS 2018-2019
Blatt 9

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra 1
Abgabe: 19.12.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 1. Sei K ein Körper. Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit $\dim V = n$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von n Vektoren in V. Zeigen Sie, dass die drei folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

a) Die Familie $v_1, \ldots, v_n$ ist ein Basis von V.
b) Die Familie $v_1, \ldots, v_n$ ist unabhängig.
c) Die Familie $v_1, \ldots, v_n$ ist ein Erzeugendensystem von V.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper.

a) Finden Sie Matrizen $A \in M_{m\times n}(K)$ und $B \in M_{n\times p}(K)$ mit $A \cdot B \neq B \cdot A$.
b) Sei n eine natürlische Zahl, $n \geq 2$. Finden Sie eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ mit $A^{n-1} \neq 0$ und $A^n = 0$ (B^n ist definiert indultiv durch $B^0 = I_n$ und $B^n = a \cdot B^{n-1}$ für alle Matrix B).
c) Seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen über K. Zeigen Sie, dass $A \cdot B = B \cdot A$ gilt genau dann, wenn $(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ gilt.

Aufgabe 3. Die Folge $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ von Fibonacci Zahlen ist definiert rekursiv durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, und, für alle $n \in \mathbf{N}$,

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \,.$$

Die ersten Folgenglieder sind also $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$, gilt (in $M_{2\times 2}(\mathbf{Q})$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Für jede reale Zahl θ definieren wir die 2×2-Matrix $R(\theta)$ (über $\mathbf{R}$) durch

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \,.$$

Zeigen Sie, dass $R(0) = I_2$ und $R(\theta) \cdot R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$ für alle θ und φ gelten.

Bonusaufgabe. Sei K ein Körper und sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum von Dimension $n \in \mathbf{N}$, zusammen mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Eine *Linearforme auf* V ist einfach eine K-lineare Abbildung von V nach K. Sei V^* der K-Vektorraum von Linearformen auf V.

a) Sei $v \in V$. Dann gibt es genau ein Element $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ mit
$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \,.$$
Wir definieren die K-lineare Abbildung $v^* : V \to K$ durch $v^*(v_i) = \lambda_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\begin{aligned} V &\to V^* \\ v &\mapsto v^* \end{aligned}$$
K-lineare und injektiv ist.
b) Sei $\varphi : V \to K$ eine Linearforme. Für jede $i \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir λ_i durch $\lambda_i = \varphi(v_i)$. Sei
$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \,.$$
Zeigen Sie, dass $\varphi = v^*$ gilt.
c) Zeigen Sie, dass die Familie $v_1^*, \ldots, v_n^*$ eine Basis von V^* ist.