Prof. Dr. Walter Gubler
Thomas Fenzl
Christian Vilsmeier

Universität Regensburg
Wintersemester 2016/17

Algebraische Schnitttheorie
Blatt 1

bis 25.10.2016

Sei im Folgenden stets A ein noetherscher Ring.

Aufgabe 1 Sei M ein A-Modul mit endlicher Länge. Zeigen Sie:

(i) Ist A ein Körper, so gilt $\ell_A(M) = \dim_A(M)$.

(ii) Ist I ein Ideal von A mit $IM = 0$, so gilt

$$\ell_A(M) = \ell_{A/I}(M).$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie:

(i) Ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Folge von A-Moduln und haben zwei der Moduln endliche Länge, so hat auch der dritte Modul endliche Länge und es gilt

$$\ell_A(M) = \ell_A(M') + \ell_A(M'').$$

Allgemeiner gilt für eine exakte Folge $0 \to M_t \to \cdots \to M_0 \to 0$ von A-Moduln mit endlicher Länge, dass

$$\sum_{i=0}^{t} (-1)^i \ell_A(M_i) = 0.$$

(ii) Ist M ein A-Modul mit endlicher Länge, so gilt

$$\ell_A(M) = \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} \ell_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}).$$

Aufgabe 3 Zeigen Sie:

(i) Ist A ein diskreter Bewertungsring mit dem surjektiven Gruppenhomomorphismus $v : \operatorname{Quot}(A)^* \to \mathbb{Z}$ als Bewertung, so gilt für $a \in A$, dass

$$\ell_A(A/(a)) = v(a).$$

(ii) Ist $h : A \to B$ ein lokaler Homomorphismus lokaler noetherscher Ringe und M ein endlicher B-Modul mit endlicher Länge, so ist M vermöge h auch ein A-Modul mit endlicher Länge und es gilt

$$\ell_A(M) = [B/\mathfrak{m}_B : A/\mathfrak{m}_A] \cdot \ell_B(M).$$

Aufgabe 4 Sei M ein endlicher A-Modul und $\varphi : M \to M$ eine A-lineare Abbildung. Sofern $\ker(\varphi)$ und $\operatorname{coker}(\varphi)$ endliche Länge haben, setzen wir

$$e_A(\varphi, M) := \ell_A(\operatorname{coker}(\varphi)) - \ell_A(\ker(\varphi)).$$

Zeigen Sie:

(i) Hat M endliche Länge, so ist $e_A(\varphi, M)$ definiert und es gilt $e_A(\varphi, M) = 0$.

(ii) Die A-Moduln $\ker(\varphi)$ und $\operatorname{coker}(\varphi)$ haben genau dann endliche Länge, wenn

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \varphi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}} \text{ ist kein Isomorphismus}\}$$

eine endliche Teilmenge von $\operatorname{MaxSpec}(A)$ ist.

(iii) Ist $e_A(\varphi, M)$ definiert, so sind auch $e_{A_{\mathfrak{p}}}(\varphi_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}})$ definiert und es gilt

$$e_A(\varphi, M) = \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} e_{A_{\mathfrak{p}}}(\varphi_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}).$$