Prof. Dr. Walter Gubler
Thomas Fenzl
Christian Vilsmeier

Universität Regensburg
Wintersemester 2016/17

Algebraische Schnitttheorie

Blatt 10

bis 10.01.2017

Aufgabe 1 Sei $g : Y \to S$ ein glatter Morphismus von algebraischen Schemata über dem Körper k und $i : S \to Y$ ein Schnitt von g, das heißt $g \circ i = \mathrm{id}_S$. Zeigen Sie, dass i eine reguläre Immersion ist mit $N_S(Y)$ kanonisch isomorph zu $i^* T_{Y/S}$ (Pullback des relativen Tangentialbündels).

Aufgabe 2 Sei $f : X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus glatter Varietäten über dem Körper k. Zeigen Sie, dass für alle $x \in A^*X$ und $y \in A^*Y$ die Projektionsformel

$$f_*(f^*y \cdot x) = y \cdot f_*x$$

in A^*Y gilt.

Aufgabe 3 Zeigen Sie anhand von [Ha, Example A.1.1.2], dass eine Schnitttheorie auf nicht-regulären Schemata nicht möglich ist.

Aufgabe 4 Sei X ein Schema und $K'(X)$ der Quotient der freien abelschen Gruppe erzeugt von den Isomorphie-Klassen von kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln nach der Untergruppe, welche von allen Ausdrücken der Form

$$[F] - [F'] - [F'']$$

zu kurzen exakten Folgen

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

von kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln erzeugt wird.

Sei jetzt

$$F_\cdot : 0 \to F_n \overset{d_n}{\to} F_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \dots \overset{d_1}{\to} F_0 \to 0$$

ein Komplex von kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln mit den Homologiegruppen

$$H_i(F_\cdot) := \ker(d_i)/\mathrm{im}(d_{i+1}).$$

Zeigen Sie, dass in $K'(X)$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i [F_i] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [H_i(F_\cdot)].$$