Prof. Dr. Walter Gubler
Thomas Fenzl
Christian Vilsmeier

Universität Regensburg
Wintersemester 2016/17

Algebraische Schnitttheorie
Blatt 11

bis 17.01.2017

Sei X ein algebraisches Schema über dem Körper k und E ein Vektorbündel auf X vom Rang r. Wir setzen $c_i := c_i(E)$ für alle $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Aufgabe 1 Wir definieren induktiv Polynome $p_n \in \mathbb{Z}[S_1, \ldots, S_n]$ durch $p_0 := r$ und

$$p_n - S_1 p_{n-1} + S_2 p_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} S_{n-1} p_1 + (-1)^n n S_n = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $m \in \mathbb{N}_{\geq n}$ gilt

$$p_n(Q_1, \ldots, Q_n) = \sum_{i=1}^{m} T_i^n,$$

wobei $Q_j \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_m]$ die elementarsymmetrischen Polynome sind, und folgern Sie

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(c_1, \ldots, c_n)}{n!}.$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass folgende Gleichheit

$$\frac{T}{1 - \exp(-T)} = 1 + \frac{1}{2}T + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} T^{2k}$$

von formalen Potenzreihen in $\mathbb{Q}[\![T]\!]$ für geeignete $B_k \in \mathbb{Q}$ gilt. Man nennt die dadurch definierten B_k die *Bernoulli-Zahlen*.

Aufgabe 3 Zeigen Sie für die Todd-Klasse

$$\begin{aligned} \mathrm{td}(E) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}(c_1 c_2) \\ + \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2 c_2 + 3c_2^2 + c_1 c_3 - c_4) + \cdots \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Sei $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ eine kurze exakte Folge von Vektorbündeln auf X. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{td}(E) = \mathrm{td}(E')\mathrm{td}(E'').$$