Prof. Dr. Walter Gubler
Thomas Fenzl
Christian Vilsmeier

Universität Regensburg
Wintersemester 2016/17

Algebraische Schnitttheorie
Blatt 14

bis 07.02.2017

Sei X ein eigentliches Schema über dem Körper k.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Pic}(X)$ die Gruppe der Isomorphieklassen der Geradenbündel auf X bezüglich $\otimes$. $L_1, L_2 \in \mathrm{Pic}(X)$ heißen *numerisch äquivalent*, falls für alle abgeschlossenen Kurven C in X gilt:

$$\deg(c_1(L_1) \cap C) = \deg(c_1(L_2) \cap C).$$

Wir schreiben dann $L_1 \equiv_{\text{num}} L_2$.

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass die numerische Äquivalenz eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2 Seien $L_1, ..., L_n, L'_1, ..., L'_n \in \mathrm{Pic}(X)$ mit

$$L_1 \equiv_{\text{num}} L'_1, ..., L_n \equiv_{\text{num}} L'_n$$

und V eine abgeschlossene Untervarietät von X mit $\dim(V) = n$. Zeigen Sie:

$$\deg(c_1(L_1) \cap ... \cap c_1(L_n) \cap [V]) = \deg(c_1(L'_1) \cap ... \cap c_1(L'_n) \cap [V]).$$

Aufgabe 3 Sei $L \in \mathrm{Pic}(X)$ und es bezeichne $\overline{k}$ den algebraischen Abschluss von k. Zeigen Sie mithilfe der Projektionsformel:

$$L \equiv_{\text{num}} \mathcal{O}_X \iff L_{\overline{k}} \equiv_{\text{num}} \mathcal{O}_{X_{\overline{k}}}.$$

Aufgabe 4 Sei X eine eigentliche Varietät über dem Körper k der Dimension n und sei $d \leq n$. Zeigen Sie, dass X eine abgeschlossene Untervarietät der Dimension d hat. Benutzen Sie dabei das Chow-Lemma, um auf den projektiven Fall zu reduzieren.