Prof. Dr. Walter Gubler
Thomas Fenzl
Christian Vilsmeier

Universität Regensburg
Wintersemester 2016/17

Algebraische Schnitttheorie
Blatt 2

bis 02.11.2016

Aufgabe 1 Sei A ein lokaler, eindimensionaler, noetherscher Integritätsring. Der ganze Abschluss B von A in $K = \mathrm{Quot}(A)$ sei ein endlicher A-Modul.

(i) Zeigen Sie mit dem Schlangenlemma, dass für $a \in A \setminus \{0\}$ gilt:

$$\ell_A(B/aB) = \ell_A(A/aA).$$

(ii) Zeigen Sie für $r \in K^\times$ mit Hilfe von 1.5 vi) (Blatt 1, Aufgabe 3 (ii)):

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B) \\ \mathfrak{p} \neq 0}} \mathrm{ord}_{B_\mathfrak{p}}(r)[B/\mathfrak{p} : A/\mathfrak{m}_A] = \mathrm{ord}_A(r).$$

Aufgabe 2 Sei A ein eindimensionaler, noetherscher, lokaler Integritätsring mit dem Quotientenkörper $K = \mathrm{Quot}(A)$, L/K eine endliche Körpererweiterung und

$$N = N_{L/K} : L^\times \to K^\times, \quad b \mapsto N(b) = \det(m_{L,b})$$

die Norm. Dabei bezeichnet $m_{L,b}$ die Multiplikationsabbildung $L \to L$, $x \mapsto b \cdot x$.
Der ganze Abschluss B von A in L sei ein endlicher A-Modul. Zeigen Sie, dass für $r \in L^\times$ gilt:

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B) \\ \mathfrak{p} \neq 0}} \mathrm{ord}_{B_\mathfrak{p}}(r)[B/\mathfrak{p} : A/\mathfrak{m}_A] = \mathrm{ord}_A(N(r)).$$

Aufgabe 3 Sei X eine reguläre, eigentliche Kurve über dem Körper k und $r \in k(X)^\times$. Zeigen Sie für den Strukturmorphismus $\pi : X \to \mathrm{Spec}(k)$, dass $\pi_*(\mathrm{div}(r)) = 0$ gilt, was den Beweis von Proposition 3.5 (ii) beendet.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass es einen endlichen Morphismus $h : X \to \mathbb{P}^1_k$ gibt und benutzen Sie das und Proposition 3.5 (i), um auf den Fall $X = \mathbb{P}^1_k$ zu reduzieren.

Aufgabe 4 Sei V eine Varietät über k und $f : V \to \mathbb{P}^1_k$ ein dominanter Morphismus. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{div}(f) = [f^{-1}(0)] - [f^{-1}(\infty)]$$

gilt, wobei $[f^{-1}(0)]$ beziehungsweise $[f^{-1}(\infty)]$ den Fundamentalzykel der jeweiligen Faser bezeichne.