Prof. Dr. Walter Gubler
Thomas Fenzl
Christian Vilsmeier

Universität Regensburg
Wintersemester 2016/17

Algebraische Schnitttheorie
Blatt 3

bis 8.11.2016

Aufgabe 1 Sei $f : A \to B$ ein flacher, lokaler Morphismus noetherscher lokaler Ringe. Zeigen Sie:

(i) Der induzierte Morphismus $\mathrm{Spec}(f) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ ist surjektiv.

(ii) Sind A und B null-dimensionale Ringe, so gilt

$$\ell_B(B) = \ell_A(A) \cdot \ell_B(B/\mathfrak{m}_A B).$$

Aufgabe 2 Sei $p \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

ein kartesisches Diagramm von algebraischen Schemata über einem Körper k, wobei f eigentlich und g flach von relativer Dimension n ist. Zeigen Sie, dass

$$g^* f_* \alpha = (f')_* (g')^* \alpha$$

in $Z_{p+n}(Y')$ für alle $\alpha \in Z_p(X)$.
Hinweis: Führen Sie die Behauptung auf den in der Vorlesung bewiesenen Spezialfall eines surjektiven eigentlichen Morphismus $f : X \to Y$ von Varietäten zurück.

Aufgabe 3 Sei X ein algebraisches Schema über einem Körper k von reiner Dimension n mit den irreduziblen Komponenten $X_1, \ldots, X_t$, sei

$$[X] = \sum_{i=1}^{t} m_i [X_i]$$

der zugehörige Fundamentalzyklus und sei D ein effektiver Cartier-Divisor auf X, d.h. ein abgeschlossenes Unterschema $D \to X$, dessen Idealgarbe lokal auf X von einem Element erzeugt wird. Wir bezeichnen $D_i := D \cap X_i := D \times_X X_i$. Zeigen Sie, dass in $Z_{n-1}(X)$ gilt

$$[D] = \sum_{i=1}^{t} m_i [D_i].$$

Aufgabe 4 Sei X ein algebraisches Schema über einem Körper k und $i : Y \to X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Sei außerdem

$$j : U = X \setminus Y \to X$$

das offene Komplement. Zeigen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{N}$ die Folge

$$A_p(Y) \xrightarrow{i_*} A_p(X) \xrightarrow{j^*} A_p(U) \to 0$$

exakt ist.