Prof. Dr. Walter Gubler
Thomas Fenzl
Christian Vilsmeier

Universität Regensburg
Wintersemester 2016/17

Algebraische Schnitttheorie
Blatt 6

bis 29.11.2016

Aufgabe 1 Seien D, D' effektive Cartier-Divisoren auf der Varietät X, $\pi : \tilde{X} \to X$ die Aufblasung im abgeschlossenen Unterschema $D \cap D' = D \times_X D'$ und $E = \pi^{-1}(D \cap D')$ der exzeptionelle Divisor. Der effektive Cartier-Divisor $\pi^* D$ gehört zum abgeschlossenen Unterschema $\pi^{-1}(D)$ in $\tilde{X}$. Wir betrachten

$$\begin{tikzcd} E = \pi^{-1}(D \cap D') \arrow[r] \arrow[d] & \pi^{-1}(D) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ D \cap D' \arrow[r] & D \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

und definieren C als das residuelle Unterschema zu E in $\pi^{-1}(D)$. Analog definieren wir C' als das residuelle Unterschema zu E in $\pi^{-1}(D')$. Zeigen Sie:

i) C und C' sind Cartier-Divisoren auf $\tilde{X}$ mit

$$\pi^* D = E + C, \ \pi^* D' = E + C'$$

und $C \cap C' = \emptyset$.

ii) Ist $\epsilon(D, D') > 0$, so ist $\max\{\epsilon(C, E), \epsilon(C', E)\} < \epsilon(D, D')$.

Aufgabe 2 Sei X ein Schema. Zeigen Sie: Für $D \in \mathrm{PDiv}(X)$ und $\alpha \in \mathrm{Rat}_p X$ ist $D \cdot \alpha = 0$ in $A_{p-1}(|D|)$, das heißt für alle abgeschlossenen Unterschemata $i : Y \to X$ ist

$$\begin{aligned} i^* : A_p Y &\to A_{p-1}(Y \cap |D|), \\ \alpha &\mapsto D \cdot \alpha \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Homomorphismus.

Aufgabe 3 Sei X ein Schema und $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für Vektorbündel E und F auf X und $\alpha \in A_p X$ gilt

$$s_i(E) \cap (s_j(F) \cap \alpha) = s_j(F) \cap (s_i(E) \cap \alpha).$$

Aufgabe 4 Sei X ein Schema, E ein Vektorbündel auf X und $c_i(E)$ die i-te Chernklasse. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} &c_0(E) = 1, \\ &c_1(E) = -s_1(E), \\ &c_2(E) = s_1(E)^2 - s_2(E) \end{aligned}$$

und allgemein

$$c_n(E) = -s_1(E)c_{n-1}(E) - s_2(E)c_{n-2}(E) - ... - s_n(E).$$