Prof. Dr. Walter Gubler
Thomas Fenzl
Christian Vilsmeier

Universität Regensburg
Wintersemester 2016/17

Algebraische Schnitttheorie
Blatt 7

bis 6.12.2016

Sei X ein algebraisches Schema über einem Körper k.

Aufgabe 1 Sei $g : E \to X$ ein Vektorbündel vom Rang r. In der Vorlesung wurde die Surjektivität von $g^* : A_{p-r}(X) \to A_p(E)$ behauptet, aber nur für das triviale Vektorbündel $E = \mathcal{O}_X^r$ gezeigt. Führen Sie den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall mit Hilfe von noetherscher Induktion zurück.

Aufgabe 2 Sei $\pi : L \to X$ ein Geradenbündel und sei $s : X \to L$ der zugehörige Nullschnitt. Zeigen Sie, dass der Gysin-Morphismus $s^* : A_p(L) \to A_{p-1}(X)$ aus 9.16 mit dem Gysin-Morphismus aus 6.8 (ii) übereinstimmt, wobei X über s als Cartier-Divisor in L eingebettet wird.

Aufgabe 3 Sei $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z} \to A_*(\mathbb{P}_k^n) \ , \ (m_0, \ldots, m_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1))^i \cap [\mathbb{P}_k^n]$$

ein Isomorphismus von graduierten $\mathbb{Z}$-Moduln ist.

(ii) Wenn wir die linke Seite mit $\mathbb{Z}[T]/(T^{n+1})$ identifizieren, erhalten wir durch den obigen Isomorphismus eine Ringstruktur auf $A_*(\mathbb{P}_k^n)$. Zeigen Sie, dass Multiplikation mit T der Operation der 1. Chern-Klasse auf $A_*(\mathbb{P}_k^n)$ entspricht.

(iii) Beweisen Sie, dass

$$\deg(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1))^n \cap [\mathbb{P}_k^n]) = 1.$$

Aufgabe 4 (Satz von Bézout) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f_1, \ldots, f_n \in k[T_0, \ldots, T_n]$ homogene Polynome. Sei außerdem d_i der Grad von f_i. Wir können f_i als globalen Schnitt von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(d_i)$ auffassen. Das zugehörige Nullstellenschema $D_i := Z(f_i)$ ist ein effektiver Cartier-Divisor auf $\mathbb{P}_k^n$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\deg(D_1 \cdot \ldots \cdot D_n \cdot [\mathbb{P}_k^n]) = d_1 \cdots d_n.$$