Prof. Dr. Walter Gubler
Thomas Fenzl
Christian Vilsmeier

Universität Regensburg
Wintersemester 2016/17

Algebraische Schnitttheorie
Blatt 8

bis 13.12.2016

Aufgabe 1 Sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel über dem Schema X. Wir identifizieren X mit dem Bild des Nullschnittes in E. Zeigen Sie, dass der Normalenkegel $C_X(E)$ kanonisch isomorph zu E ist.

Für das Folgende sei $i_0 : X \to Y$ eine abgeschlossene Immersion in ein algebraisches Schema Y über dem Körper k. Weiter sei $M := \mathrm{Bl}_{X\times\{\infty\}}(Y \times \mathbb{P}^1_k)$. Dann erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \times_k \mathbb{P}^1_k \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & & M \arrow[dl, "\rho"] \\
& \mathbb{P}^1_k &
\end{tikzcd}$$

aus kanonischen Morphismen.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass i eine abgeschlossene Immersion und ρ flach ist.

Aufgabe 3 Zeigen Sie:

(i) Über $\infty \in \mathbb{P}^1_k$ ist der Cartier-Divisor $M_\infty = \rho^{-1}(\infty)$ die Summe von zwei effektiven Cartier-Divisoren
$$M_\infty = P(C \oplus 1) + \tilde{Y},$$
wobei $\tilde{Y} = \mathrm{Bl}_X Y$ die Aufblasung bezeichnet.

(ii) Die effektiven Cartier-Divisoren $P(C \oplus 1)$ und $\tilde{Y}$ schneiden sich genau in $P(C)$ aufgefasst als Hyperebene bei ∞ in $P(C \oplus 1)$ wie in Bemerkung 10.2 iii) und als exzeptioneller Divisor in $\tilde{Y}$.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass die von i induzierte abgeschlossene Immersion
$$i_\infty : X = X \times \{\infty\} \to M_\infty$$
gegeben ist durch den Null-Schnitt von X in C komponiert mit der kanonischen offenen Einbettung von C in $P(C \oplus 1)$ in M_∞.