Delignes kompatible ℓ-adische Darstellungen

Moritz Kerz

Moritz Kerz wurde im vergangenen Jahr mit dem wichtigsten Preis für den wissenschaftlichen Nachwuchs in Deutschland, dem Heinz Maier-Leibnitz-Preis, ausgezeichnet. Im Folgenden berichtet er über eines seiner aktuellen Arbeitsgebiete aus dem Bereich der Arithmetischen Geometrie.

Deligne, Drinfeld und Lafforgue gelang es im Laufe der vergangenen zehn Jahre, eine Reihe spektakulärer neuer Ergebnisse über eine tiefe Vermutung von Deligne über ℓ-adische Galoisdarstellungen zu erzielen. Ich möchte im Folgenden den Satz von Drinfeld in diesem Programm schildern. Obwohl der Beweis, besonders der Teil, der auf der Theorie der automorphen Formen basiert, sehr tiefliegend ist, lässt sich das Ergebnis verhältnismäßig einfach formulieren.

Besonders herausstellen möchte ich auch den für Drinfelds Satz zentralen Beitrag von Götz Wiesend.

1 Die topologische Fundamentalgruppe

In der algebraischen Topologie spiegelt man globale räumliche Information von geometrischen Objekten durch einfache Invarianten wider. Eines der ältesten und wichtigsten Konzepte hierfür ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ eines topologischen Raumes X (der Einfachheit halber vergessen wir einen eigentlich zu fixierenden Basispunkt von X).

Die Fundamentalgruppe ist die Menge der kontinuierlichen Schleifen in X bis auf kontinuierliche Deformation, das heißt die Elemente von $\pi_1(X)$ werden durch stetige Abbildung von

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

nach X repräsentiert.

Das für unsere Anschauung wichtigste Beispiel ist die Fundamentalgruppe von $X = S^1$. Es ist anschaulich klar, dass man jeder Schleife $S^1 \to S^1$ die Anzahl der Umdrehungen um den Ursprung zuordnen kann und dass sich diese sogenannte Windungszahl unter Deformation nicht ändert. Mathematisch gesprochen liefert die Windungszahl eine vollständige Beschreibung von $\pi_1(S^1)$, d.h. man hat einen Isomorphismus

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\,.$$

2 Affine Varietäten

In der algebraischen Geometrie studiert man Nullstellenmengen von Polynomen in mehreren Variablen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf affine Varietäten. Dazu betrachtet man einen algebraisch abgeschlossenen Körper k (z. B. die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$). Es seien $f_1, \ldots, f_m : k^d \to k$ polynomiale Funktionen. Wir sagen dann, dass

$$X = \{x \in k^d \mid f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0\} \subset k^d$$

eine affine algebraische Varietät ist.

Wir wollen im Folgenden annehmen, dass unser X glatt ist, was so viel heißt, wie dass X keine Ecken und Kanten hat. Falls $k = \mathbb{C}$ bekommt X als Teilmenge von $\mathbb{C}^d$ eine topologische Struktur, und wir können die topologische Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ studieren, zum Beispiel dadurch, dass wir lineare Darstellungen $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ betrachten. Ein klassischer Satz besagt, dass $\pi_1(X)$ endlich erzeugt ist, so dass man die linearen Darstellungen zumindest prinzipiell verstehen kann.

Eine der wichtigsten Entdeckungen der algebraischen Geometrie des zwanzigsten Jahrhunderts ist, dass die Geometrie über einem endlichen Körper sich ähnlich verhält wie die Geometrie über den komplexen Zahlen. Es stellt sich also die Frage: Was ist das Analogon von $\pi_1(X)$ über einem endlichen Körper, und was entspricht den Darstellungen $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$? Eine vollkommen präzise Fassung dieser Frage hat Deligne in seinem berühmten Artikel *Weil II* als Vermutung formuliert [D1, Conj. 1.2.10]. Diese Vermutung wurde im Laufe der vergangenen zehn Jahre durch Arbeiten von Deligne, Drinfeld und Lafforgue [D2, Dr, L] vollständig bewiesen. Drinfeld benutzt dabei ganz wesentlich Ideen, die von Götz Wiesend im Rahmen der sogenannten höherdimensionalen Klassenkörpertheorie entwickelt wurden [W].

3 Die Weil-Gruppe und ihre Darstellungen

Fangen wir also mit dem Analogon von $\pi_1(X)$ über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ an. Dazu nehmen wir an, dass unsere affine Varität X über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ definiert ist, was soviel heißt, wie dass k der algebraische Abschluss von $\mathbb{F}_q$ ist und dass die Polynome $f_1, \dots, f_m$ Koeffizienten in $\mathbb{F}_q$ haben. Die beste Approximation der topologischen Fundamentalgruppe über einem endlichen Körper ist die sogenannte Weil-Gruppe $W(X)$, die keine diskrete Gruppe, sondern eine topologische Gruppe ist.

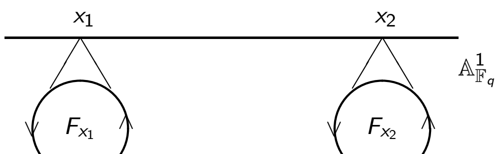
Was ist also die Weil-Gruppe? Für diejenigen, die sich mit Galoistheorie auskennen, könnte man sie so charakterisieren, dass es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Gal}(F_{\mathrm{ur}}|k(X)) \to W(X) \to \mathbb{Z} \to 0$$

gibt, wobei F_{ur} die maximale Körpererweiterung des Funktionenkörpers $k(X)/k$ ist, die unverzweigt über X ist. Eine wichtige Beobachtung ist, dass, falls X nur aus einem einzigen Punkt besteht, $W(X)$ die diskrete Gruppe $\mathbb{Z}$ ist. Man kann auch sagen:

> Ein Punkt über einem endlichen Körper verhält sich topologisch so wie die Sphäre S^1.

Einmal um den Ursprung laufen auf S^1 entspricht über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ dem Frobenius-Automorphismus $F : k \to k$, $F(x) = x^q$. Der Frobenius „dreht" also den Punkt infinitesimal um sich selbst. Für eine allgemeine affine Varietät X bekommt man dann um jeden Punkt $x \in X$ einen solchen kleinen „Dreh", den Frobenius F_x in $W(X)$, siehe folgende Abbildung:



Ein Satz von Tschebotarev besagt, dass die verschiedenen Frobenii F_x die Weil-Gruppe $W(X)$ topologisch erzeugen. Über einem endlichen Körper haben wir also keine kontinuierlichen Schleifen mehr, aber wir haben zu jedem Punkt die „infinitesimale Schleife" des Frobenius. Das große Rätsel ist, wie diese verschiedenen Frobenii zusammenhängen, denn der Begriff der kontinuierlichen Deformation von Schleifen fehlt uns jetzt vollständig. Sehr grob ausgedrückt liefert das sogenannte Langlandsprogramm einen Ersatz für die kontinuierliche Deformation der infinitesimalen „Frobenius-Schleifen" – in der Arithmetik spricht man hier von einem Reziprozitätsgesetz. Wir werden unten noch einmal auf das Langlandsprogramm zu sprechen kommen.

Kommen wir nun zum Analogon der Darstellung $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Nur die stetigen Darstellungen der Weil-Gruppe $W(X) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ zu betrachten, ist keine gute Idee. Davon gibt es viel zu wenige. Stattdessen fixiert man eine Primzahl ℓ prim zu q und betrachtet anstelle von $\mathbb{C}$ den algebraischen Abschluss des Körpers der ℓ-adischen Zahlen $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Die dahinterstehende Motivation ist, dass $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ als abstrakter Körper isomorph zu $\mathbb{C}$ ist und eine viel flexiblere Topologie besitzt. Der Nachteil ist natürlich, dass wir eine zusätzliche Wahl einer Primzahl ℓ treffen müssen. Die Vermutung von Deligne besagt gerade, dass diese Wahl in Wirklichkeit gar keine ist.

4 Die Existenz von kompatiblen Darstellungen

Wegen des Satzes von Tschebotarev ist eine irreduzible stetige ℓ-adische Darstellung

$$\rho_\ell : W(X) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

im Wesentlichen durch die charakteristischen Polynome des Frobenius

$$P_{\rho_\ell,x} = \det(1 - t\,\rho_\ell(F_x) : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[t] \quad (x \in X)$$

vollständig bestimmt.

Drinfeld zeigte 2010 [Dr]:

Theorem. *Die Darstellung ρ_ℓ hängt nicht von ℓ ab, d.h. genauer zu jeder weiteren Primzahl ℓ' prim zu q und jedem Körperisomorphismus $\tau : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}$ gibt es eine eindeutige stetige Darstellung $\rho_{\ell'} : W(X) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'})$ mit $\tau(P_{\rho_\ell,x}) = P_{\rho_{\ell'},x}$ für alle $x \in X$.*

Wichtig zu betonen ist natürlich, dass man $\rho_{\ell'}$ nicht durch einfachen Twist mit τ bekommt, denn τ ist nicht stetig.

Dieser Satz ist der zentrale Teil von Delignes Vermutung [D1, Conj. 1.2.10]. Auch die anderen Teile der Vermutung, bis auf die Existenz der „petits camarades cristallins", sind mittlerweile bewiesen.

Drinfelds Beweis benutzt im Wesentlichen drei Bausteine:

(1) Der Satz wurde 2001 von Lafforgue für eindimensionales X als Konsequenz seiner Langlandskorrespondenz für GL_n von Funktionenkörpern bewiesen [L].

(2) Deligne [D2] beweist aufbauend auf der Langlandskorrespondenz einen allgemeinen Endlichkeitssatz für ℓ-adische Darstellungen.

(3) Schließlich benutzt Drinfeld, um von eindimensionalen Varietäten auf den allgemeinen Fall zu schließen, einen Ansatz von Wiesend [W], siehe auch [KS], [K]. Die Idee ist, die Darstellung erst durch eine gewisse nicht zu große Überlagerungen zu kontrollieren und dann zu der Überlagerung eine gute Kurve $C \to X$ zu wählen, für die man die von Lafforgue konstruierte Darstellung von $W(C)$ zu einer Darstellung von $W(X)$ herunter drücken kann.

5 Über Götz Wiesend

Götz Wiesend hat seine Ideen, besonders die oben erwähnten „guten“ Kurven, ursprünglich für die Anwendung in der höherdimensionalen Klassenkörpertheorie entwickelt. In ihr möchte man die abelsche Galoisgruppe eines endlich erzeugten Körpers durch eine Klassengruppe beschreiben. Eine Version einer solchen Theorie wurde von Bloch, Parshin und Kato-Saito zu Beginn der 80-er Jahre entwickelt.

Götz Wiesend studierte an der Universität Erlangen und wurde dort 1996 bei Wulf-Dieter Geyer mit einer Arbeit über arithmetische Dualitätssätze promoviert. Über die nächsten zehn Jahre entwickelte Wiesend einen völlig neuen und spektakulär einfachen Zugang zur höherdimensionalen Klassenkörpertheorie, der gleichzeitig tiefere Resultate liefert als die ursprüngliche Theorie von Kato-Saito.

Wulf-Dieter Geyer beschreibt Wiesends mathematische Arbeitsweise als ungewöhnlich; so habe er intuitiv schon bald die Umrisse seiner Klassenkörpertheorie im Kopf gehabt und habe erst mit der Zeit die präzisen Formulierungen und vollständigen Beweise nachträglich entwickelt.

Nach seiner Promotion arbeitete Wiesend die meiste Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Erlangen in der Arbeitsgruppe Geyer, bis er 2005 an das Institut für experimentelle Mathematik der Universität Duisburg-Essen wechselte.

Die große internationale Anerkennung, die seine Arbeiten seitdem unter anderem mit einem Vortrag im Séminaire Bourbaki [S] und der oben geschilderten Anwendung auf ℓ-adische Galoisdarstellungen durch Drinfeld erfahren haben, konnte Götz Wiesend leider nicht mehr miterleben. Am 9.1.2007 nahm er sich in Essen das Leben.

Ich danke Hélène Esnault und Wulf-Dieter Geyer für Hilfe beim Verfassen des Textes.

Literatur

[D1] Deligne, P. *La conjecture de Weil II*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 52 (1980), 137–252.

[D2] Deligne, P. *Finitude de l'extension de $\mathbb{Q}$ engendré par des traces de Frobenius, en caractéristique finie*, to appear in Moscow Mathematical Journal (2012).

[Dr] Drinfeld, V. *On a conjecture of Deligne*, to appear in Moscow Mathematical Journal (2012).

[K] Kerz, M. *Higher class field theory and the connected component*, Manuscripta Math. 135 (2011), no. 1-2, 63–89.

[KS] Kerz, M., Schmidt, A. *Covering data and higher dimensional global class field theory*, J. Number Theory 129 (2009), no. 10, 2569–2599.

[L] Lafforgue, L. *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. 147 (2002), no. 1, 1–241.

[S] Szamuely, T. *Corps de classes des schémas arithmétiques*, Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011.

[W] Wiesend, G. *A construction of covers of arithmetic schemes*, J. Number Theory 121 (2006), no. 1, 118–131.

Prof. Dr. Moritz Kerz, Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg.
moritz.kerz@mathematik.uni-regensburg.de

Prof. Dr. Moritz Kerz studierte Mathematik in Frankfurt am Main und in Mainz. Er promovierte 2008 an der Universität Regensburg bei Uwe Jannsen und Stefan Müller-Stach. Von 2009 bis 2011 war er Emmy Noether-Nachwuchsgruppenleiter and der Universität Duisburg-Essen. Seit Oktober 2011 ist er Professor an der Universität Regensburg.