

Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank

Blatt 0 vom 4. Mai 2011

the Ravenous Bugblatter Beast of Traal
(a mindboggingly stupid animal, it assumes that
if you can't see it, it can't see you
daft as a bush, but very ravenous)

Douglas Adams, *The Hitch Hiker's Guide to the Galaxy*

Aufgabe 1 (Aussagenlogik). Sind die folgenden aussagenlogischen Formeln Tautologien? (Hierbei bezeichnen A, B, C aussagenlogische Variablen.) Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$
2. $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$
3. $((\neg A) \implies (B \wedge \neg B)) \implies A$
4. $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C)$

Aufgabe 2 (Negation von Aussagen). Formalisieren Sie die folgenden Aussagen im Stile der Quantorenlogik und negieren Sie die Aussagen.

1. Es gibt kein Bier auf Hawaii.
[Paul Kuhn]
2. Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist.
[alte Bauernregel]
3. Nachts sind alle Agenten grau und keiner wird aus keinem schlau.
[Brettspiel Heimlich & Co]
4. Wenn Du einen Schneck behauchst
Schrumpft er ins Gehäuse, [und]
Wenn Du ihn in Kognak tauchst,
Sieht er weiße Mäuse.
[Ringelnatz, Überall]

Aufgabe 3 (Folgerungen aus Axiomen). Beweisen Sie, dass die Aussage

Der Mond besteht aus Quantoren.

logisch aus den folgenden Axiomen folgt:

- ① Tux ist ein Pinguin.
- ② Tux ist kein Pinguin.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Ein Widerspruch?). Einbliz und Nonewt sind namhafte Spezialisten für Analysis; Einbliz ist überzeugt, dass er mit seiner neuesten Erkenntnis die Mathematik revolutionieren wird:

Einbliz Heureka! Endlich kann ich es zeigen: Wenn A und B quantorenlogische Aussagen sind und $A \implies B$ gilt, so gilt auch $B \implies A$; das wird die umständliche Beweiserei deutlich vereinfachen!

Nonewt Bist Du noch ganz dicht? Das ist offensichtlich falsch!

Einbliz Watch and learn! Ich kann es beweisen: Seien A und B quantorenlogische Aussagen und es gelte $A \implies B$. *Angenommen*, es gilt nicht $B \implies A$, d.h. es gilt $B \implies \neg A$. Wegen $A \implies B$ erhalten wir daraus aber auch $A \implies \neg A$, was nicht sein kann. Also muss die Annahme falsch gewesen sein, und damit gilt $B \implies A$. Quod erat demonstrandum.

Nonewt Uh-oh! Aber ich weiß doch, dass es nicht sein kann ...

Können Sie weiterhelfen?

Bonusaufgabe. Commander Blorx braust in seinem Ufo durch die Galaxie. Bei Sternzeit 31415.9 erreicht er zwei Wurmlochportale. Er weiß, dass eines der beiden nach Hause führt und das andere in den gefürchteten ϑ -Quadranten; er weiß jedoch nicht, welches welches ist.

Zufällig fliegt ein weiteres Raumschiff vorbei; das Raumschiff gehört entweder zu den Ertu oder zu den Elsaf. Glücklicherweise wissen alle Ertu und Elsaf wohin die Portale führen. Alle Ertu sagen immer die Wahrheit und alle Elsaf sagen nie die Wahrheit. Blorx kann nicht erkennen zu wem das Raumschiff gehört – da die Raumschiffe der Ertu bzw. Elsaf nur an der griechischen Beschriftung zu unterscheiden sind und Blorx trotz bester Vorsätze das griechische Alphabet nicht beherrscht.

Wie kann Blorx mit einer einzigen Ja/Nein-Frage an den Kapitän des vorbeifliegenden Raumschiffes das richtige Portal identifizieren?