Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 0 vom 4. Mai 2011

the Ravenous Bugblatter Beast of Traal
(a mindboggingly stupid animal, it assumes that
if you can't see it, it can't see you
daft as a bush, but very ravenous)

Douglas Adams, *The Hitch Hiker's Guide to the Galaxy*

Aufgabe 1 (Aussagenlogik)**.** Sind die folgenden aussagenlogischen Formeln Tautologien? (Hierbei bezeichnen A, B, C aussagenlogische Variablen.) Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \lor B)$

   Lösungshinweise. Dies ist eine aussagenlogische Tautologie wie man an der folgenden Wahrheitstafel ablesen kann (entscheidend ist hierbei, dass in der letzten Spalte alle Einträge den Wahrheitswert w haben):

A	B	$A \Longrightarrow B$	$(\neg A) \lor B$	$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \lor B)$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

2. $\neg(A \land B) \Longleftrightarrow (\neg A \land \neg B)$

   Lösungshinweise. Dies ist *keine* aussagenlogische Tautologie wie man am folgenden Fragment einer entsprechenden Wahrheitstafel ablesen kann:

A	B	$\neg(A \land B)$	$(\neg A) \land (\neg B)$	$\neg(A \land B) \Longleftrightarrow (\neg A \land \neg B)$
w	w			
w	f	w	f	f
f	w			
f	f			

3. $\big((\neg A) \Longrightarrow (B \land \neg B)\big) \Longrightarrow A$

   Lösungshinweise. Dies ist eine aussagenlogische Tautologie wie man an der folgenden Wahrheitstafel ablesen kann:

A	B	$\neg A$	$B \land (\neg B)$	$(\neg A) \Longrightarrow (B \land \neg B)$	$\big((\neg A) \Longrightarrow (B \land \neg B)\big) \Longrightarrow A$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	f	w	w
f	w	w	f	f	w
f	f	w	f	f	w

   [Aus dieser Tautologie leitet sich das Beweisprinzip des Widerspruchsbeweises ab (*reductio ad absurdum*).]

4. $\big((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)\big) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$

   Lösungshinweise. Dies ist eine aussagenlogische Tautologie wie man an der folgenden Wahrheitstafel ablesen kann:

A	B	C	$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow C$	$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)$	$A \Longrightarrow C$	$\big((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)\big) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Aufgabe 2 (Negation von Aussagen)**.** Formalisieren Sie die folgenden Aussagen im Stile der Quantorenlogik und negieren Sie die Aussagen.
Lösungshinweise. Allgemeine Hinweise zur Lösung: Da die deutsche Sprache viele Mehrdeutigkeiten besitzt und nicht jeder Satz auf eine eindeutige Art und Weise als quantorenlogische Formel formalisiert werden kann, kann es auch weitere sinnvolle Lösungen dieser Aufgabe geben.

1. Es gibt kein Bier auf Hawaii.
   [Paul Kuhn]

   Lösungshinweise. Wir formalisieren diesen Satz durch

   $$\neg \Big(\exists x \ \big((x \text{ ist Bier}) \wedge (x \text{ ist auf Hawaii})\big)\Big).$$

   Negieren liefert

   $$\exists x \ \big((x \text{ ist Bier}) \wedge (x \text{ ist auf Hawaii})\big)$$

   bzw. „Es gibt Bier auf Hawaii“.

2. Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist.
   [alte Bauernregel]

   Lösungshinweise. Wir formalisieren diesen Satz durch

   $$\begin{aligned} &(\text{Der Hahn kräht auf dem Mist}) \\ \Longrightarrow &\big((\text{Das Wetter ändert sich}) \vee (\text{Das Wetter bleibt wie es ist})\big). \end{aligned}$$

   Nach der Tautologie aus Teil 1 von Aufgabe 1 ist dies logisch äquivalent zu

   $$\begin{aligned} &\big(\neg(\text{Der Hahn käht auf dem Mist})\big) \\ \vee &\big((\text{Das Wetter ändert sich}) \vee (\text{Das Wetter bleibt wie es ist})\big). \end{aligned}$$

   Mit Hilfe der de Morganschen Regeln erhalten wir daraus die Negation

   $$\begin{aligned} &(\text{Der Hahn kräht auf dem Mist}) \\ \wedge &\neg(\text{Das Wetter ändert sich}) \wedge \neg(\text{Das Wetter bleibt wie es ist}) \end{aligned}$$

bzw. „Der Hahn kräht auf dem Mist, aber das Wetter ändert sich nicht und das Wetter bleibt nicht wie es ist“.

[Eine gültige (wenn auch nicht sehr aufschlussreiche) Negation ist zum Beispiel auch „Es gilt nicht, dass wenn der Hahn auf dem Mist kräht, sich das Wetter ändert oder es bleibt wie es ist“.]

3. Nachts sind alle Agenten grau und keiner wird aus keinem schlau.
   [Brettspiel Heimlich & Co]

   Lösungshinweise. Dieser Satz lässt sich auf viele Weisen formalisieren (und auch unterschiedlich verstehen); wir formalisieren ihn wie folgt:

   $$(\text{Es ist Nacht}) \Longrightarrow \Big(\forall x\ \big((x \text{ ist Agent}) \Longrightarrow (x \text{ ist grau})\big) \wedge \big(\neg\exists y\ \neg\exists z\ (y \text{ wird schlau aus } z)\big)\Big)$$

   Zum Verneinen gehen wir wie im letzten Fall vor. Nach der Tautologie aus Teil 1 von Aufgabe 1 ist dies logisch äquivalent zu :

   $$\neg(\text{Es ist Nacht}) \vee \Big(\forall x\ \big((x \text{ ist Agent}) \Longrightarrow (x \text{ ist grau})\big) \wedge \big(\neg\exists y\ \neg\exists z\ (y \text{ wird schlau aus } z)\big)\Big)$$

   Zum negieren benutzen wir wieder die de Morganschen Regeln und erhalten als Negation:

   $$(\text{Es ist Nacht}) \wedge \neg\Big(\forall x\ \big((x \text{ ist Agent}) \Longrightarrow (x \text{ ist grau})\big) \wedge \big(\neg\exists y\ \neg\exists z\ (y \text{ wird schlau aus } z)\big)\Big)$$

   Indem wir die de Morganschen Regeln auf den rechten Teil anwenden erhalten wir:

   $$(\text{Es ist Nacht}) \wedge \Big(\neg\forall x\ \big((x \text{ ist Agent}) \Longrightarrow (x \text{ ist grau})\big) \vee \big(\exists y\ \neg\exists z\ (y \text{ wird schlau aus } z)\big)\Big)$$

   Anwenden der Tautologie aus Teil 1 von Aufgabe 1 auf die verbliebene Implikation liefert:

   $$(\text{Es ist Nacht}) \wedge \Big(\neg\forall x\ \big(\neg(x \text{ ist Agent}) \vee (x \text{ ist grau})\big) \vee \big(\exists y\ \neg\exists z\ (y \text{ wird schlau aus } z)\big)\Big)$$

   Mittels der Negationsregeln für Quantoren erhalten wir:

   $$(\text{Es ist Nacht}) \wedge \Big(\big(\exists x\ \neg(\neg(x \text{ ist Agent}) \vee (x \text{ ist grau}))\big) \vee \big(\exists y\ \neg\exists z\ (y \text{ wird schlau aus } z)\big)\Big)$$

   Ein letztes Mal de Morgan liefert:

   $$(\text{Es ist Nacht}) \wedge \Big(\big(\exists x\ ((x \text{ ist Agent}) \wedge \neg(x \text{ ist grau}))\big) \vee \big(\exists y\ \neg\exists z\ (y \text{ wird schlau aus } z)\big)\Big)$$

   Mit anderen Worten: „Es ist Nacht und es gibt einen Agenten, der nicht grau ist, oder es gibt jemanden, der aus niemandem schlau wird.“

4. Wenn Du einen Schneck behauchst
   Schrumpft er ins Gehäuse, [und]
   Wenn Du ihn in Kognak tauchst,
   Sieht er weiße Mäuse.
   [Ringelnatz, Überall]

Lösungshinweise. Wir formalisieren diesen Satz wie folgt:

$$
\begin{aligned}
&\forall x \ (x \text{ ist ein Schneck}) \\
&\Longrightarrow \Big(\big((x \text{ wird behaucht}) \Longrightarrow (x \text{ schrumpft ins Gehäuse}) \big) \\
&\qquad \wedge \big((x \text{ wird in Kognak getaucht}) \Longrightarrow (x \text{ sieht weiße Mäuse}) \big) \Big).
\end{aligned}
$$

Verneinen mit Hilfe der Negationsregeln für Quantoren bzw. mit Hilfe der de Morganschen Regeln (wie in Teil 2) liefert

$$
\begin{aligned}
\exists x \ (x \text{ ist Schneck}) \wedge \Bigg(&\big((x \text{ wird behaucht}) \wedge \neg (x \text{ schrumpft ins Gehäuse}) \big) \\
&\vee \big((x \text{ wird in Kognak getaucht}) \wedge \neg (x \text{ sieht weiße Mäuse}) \big) \Bigg)
\end{aligned}
$$

und damit „Es gibt eine Schnecke, die behaucht wird und nicht ins Gehäuse schrumpft, oder die in Kongnak getaucht wird und keine weißen Mäuse sieht“.

Aufgabe 3 (Folgerungen aus Axiomen)**.** Beweisen Sie, dass die Aussage

Der Mond besteht aus Quantoren.

logisch aus den folgenden Axiomen folgt:

① Tux ist ein Pinguin.

② Tux ist kein Pinguin.

Lösungshinweise. Sind A und B aussagenlogische Variablen, so ist

$$\big(A \wedge (\neg A)\big) \Longrightarrow B$$

eine aussagenlogische Tautologie wie man an der folgenden Wahrheitstafel ablesen kann:

A	B	$A \wedge (\neg A)$	$\big(A \wedge (\neg A)\big) \Longrightarrow B$
w	w	f	w
w	f	f	w
f	f	f	w
f	w	f	w

[Dies zeigt nochmal explizit, dass man aus einem Widerspruch („$A \wedge \neg A$“) *alles* ableiten kann.]

Setzen wir für A die Aussage „Tux ist ein Pinguin.“ ein, so erhalten wir aus den Axiomen ① und ②, dass $A \wedge (\neg A)$ gilt. Setzen wir nun für B die Aussage „Der Mond besteht aus Quantoren.“ ein, so erhalten wir mit obiger Tautologie und dem Modus ponens, dass B gilt, und damit, dass der Mond aus Quantoren besteht.

Man kann diesen Beweis natürlich auch kürzer zusammenfassen: Die Axiome ① und ② widersprechen sich. Daher folgt aus diesen Axiomen jede beliebige Aussage (*ex falso quodlibet*), und damit insbesondere auch die Aussage „Der Mond besteht aus Quantoren“.

Aufgabe 4 (Ein Widerspruch?)**.** Einbliz und Nonewt sind namhafte Spezialisten für Analysis; Einbliz ist überzeugt, dass er mit seiner neuesten Erkenntnis die Mathematik revolutionieren wird:

Einbliz	Heureka! Endlich kann ich es zeigen: Wenn A und B quantorenlogische Aussagen sind und $A \Longrightarrow B$ gilt, so gilt auch $B \Longrightarrow A$; das wird die umständliche Beweiserei deutlich vereinfachen!
Nonewt	Bist Du noch ganz dicht? Das ist offensichtlich falsch!
Einbliz	Watch and learn! Ich kann es beweisen: Seien A und B quantorenlogische Aussagen und es gelte $A \Longrightarrow B$. *Angenommen*, es gilt nicht $B \Longrightarrow A$, d.h. es gilt $B \Longrightarrow \neg A$. Wegen $A \Longrightarrow B$ erhalten wir daraus aber auch $A \Longrightarrow \neg A$, was nicht sein kann. Also muss die Annahme falsch gewesen sein, und damit gilt $B \Longrightarrow A$. Quod erat demonstrandum.
Nonewt	Uh-oh! Aber ich weiß doch, dass es nicht sein kann ...

Können Sie weiterhelfen?

Lösungshinweise. Die Argumentation von Einbliz enthält mehrere Fehler:

- Die Negation von $B \Longrightarrow A$ ist im allgemeinen *nicht* $B \Longrightarrow \neg A$ (man betrachte zum Beispiel den Fall, dass B falsch ist; dann sind $B \Longrightarrow A$ und $B \Longrightarrow \neg A$ wahr).
- Im allgemeinen ist $A \Longrightarrow \neg A$ *kein* Widerspruch (man betrachte etwa den Fall, dass die Aussage A falsch ist).

Tatsächlich ist

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$$

im allgemeinen *nicht* korrekt (s. Vorlesung). Die Richtung der Implikationspfeile ist wichtig!

Bonusaufgabe. Commander Blorx braust in seinem Ufo durch die Galaxie. Bei Sternzeit 31415.9 erreicht er zwei Wurmlochportale. Er weiß, dass eines der beiden nach Hause führt und das andere in den gefürchteten ϑ-Quadranten; er weiß jedoch nicht, welches welches ist.

Zufällig fliegt ein weiteres Raumschiff vorbei; das Raumschiff gehört entweder zu den Ertu oder zu den Elsaf. Glücklicherweise wissen alle Ertu und Elsaf wohin die Portale führen. Alle Ertu sagen immer die Wahrheit und alle Elsaf sagen nie die Wahrheit. Blorx kann nicht erkennen zu wem das Raumschiff gehört – da die Raumschiffe der Ertu bzw. Elsaf nur an der griechischen Beschriftung zu unterscheiden sind und Blorx trotz bester Vorsätze das griechische Alphabet nicht beherrscht.

Wie kann Blorx mit einer einzigen Ja/Nein-Frage an den Kapitän des vorbeifliegenden Raumschiffes das richtige Portal identifizieren?

Lösungshinweise. Um die Formulierung zu vereinfachen, nehmen wir an, dass es nur diese beiden Arten von Aliens gibt. Da beide Portale in Frage kommen, muss unsere Entscheidung von der Antwort auf unsere Frage abhängen, d.h. wir benötigen eine Strategie wie „bei einer bejahenden Antwort wähle Portal 1, sonst Portal 2“. Insbesondere müssen wir also eine Frage stellen, die von beiden Arten von Aliens mit der gleichen Antwort erwidert wird.

Der Trick an dieser Stelle ist, das Alien zu fragen, was ein Alien der anderen Art auf eine bestimmte Frage antworten würde, etwa „Was würde ein Alien, das von der anderen Art ist, auf die Frage F antworten?“, wobei F eine beliebige Ja/Nein-Frage ist.

Ein Ertu wird auf diese Frage die Antwort eines Elsaf geben, also die Frage falsch beantworten. Ein Elsaf wird darauf aber nicht die Antwort eines Ertu geben, also wird ein Elsaf die Frage ebenfalls falsch beantworten.

Wenn wir die Antwort auf eine Frage F haben wollen, können wir also obige Frage stellen, und müssen die Antwort nur noch verneinen. In der konkreten Version des Rätsels können die Aliens nur Ja/Nein-Fragen beantworten, wir müssen dies also noch berücksichtigen und erhalten daher etwas verschachtelt:

Frage Würde mir ein Alien der anderen Art als der deinen auf die Frage: „Führt das erste Wurmlochportal in den ϑ-Quadranten?“ mit „Ja“ antworten?

Falls die Antwort Ja ist können wir sicher durch das erste Portal reisen, andernfalls durch das zweite.

---

keine Abgabe;
diese Aufgaben werden in den Übungen am 11./13. Mai 2011 besprochen