

# Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank

Blatt 11 vom 15. Juli 2011

---

God does not care about our mathematical difficulties.  
He integrates empirically.  
Albert Einstein, *Gespräch mit Leopold Infeld*

**Aufgabe 1** (Ableitungen, rückwärts). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Finden Sie alle differenzierbaren Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f' = \text{id}_{\mathbb{R}}$ .
2. Finden Sie alle differenzierbaren Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Ableitung  $f'$  die Betragsfunktion  $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist.

**Aufgabe 2** (Der Cauchysche Mittelwertsatz).

1. Beweisen Sie den *Cauchyschen Mittelwertsatz*: Sind  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sind  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $[a, b]$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar, so gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$g'(\xi) \cdot (f(b) - f(a)) = f'(\xi) \cdot (g(b) - g(a)).$$

2. Geben Sie ein Beispiel für diese Situation!

**Aufgabe 3** (Lokale Extrema – ein hinreichendes Kriterium).

1. Zeigen Sie: Sei  $X \subset \mathbb{R}$  offen, sei  $a \in X$  und sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $X$  zweimal differenzierbar mit  $f'(a) = 0$  und  $f''(a) < 0$ . Dann ist  $a$  eine lokale Maximalstelle von  $f$ .
2. Geben Sie ein Beispiel für diese Situation!

**Aufgabe 4** (Verschwindende Integrale). Einbliz und Nonewt führen eine Integrationsdebatte:

*Nonewt* Aloha! Wenn man wissen will, ob eine Funktion überall Null ist, muss man sie einfach nur integrieren, denn es gilt der Nonewtsche Hauptsatz der Integralrechnung: Ist  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemannintegrierbar und ist  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ , so ist  $f = 0$ .

*Einbliz* In Deiner Welt gibt es wohl keine Funktionen mit negativen Werten?! Dein sogenannter Hauptsatz gilt natürlich nur für Riemannintegrierbare Funktionen  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [0, 1]$ .

Können Sie weiterhelfen? D.h. gelten die Behauptungen von Nonewt bzw. Einbliz? Begründen Sie Ihre Antwort!

**Bonusaufgabe** (Historisches). Commander Blorx denkt an seine Zukunft; da ihm das aber eigentlich zu anstrengend ist, konstruiert er eine Zeitmaschine. Als letzter Feinschliff fehlt ihm nur noch die temporalanalytische Kalibrierung. Aus wissenschaftlich nicht ganz nachvollziehbaren Gründen benötigt er dafür die Namen von vier Analytikern, deren Bilder im Gebäude der Fakultät für Mathematik in Regensburg hängen, samt Ortsangabe des Bildes, Lebensdaten und einem entsprechenden Resultat aus der Analysis. Helfen Sie Blorx!

---

Abgabe bis zum 22. Juli 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen