Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 12 vom 22. Juli 2011

Ah-ha! Now I've got the bead on you with MY disintegrating pistol!
And brother, when it disintegrates, it disintegrates!
[Pulls trigger; the pistol disintegrates]
Heh, what do you know . . . It disintegrated.
Daffy Duck, *Duck Dodgers in the 24th 1/2 Century*

Aufgabe 1 (Integrale)**.** Bestimmen Sie die folgenden Integrale; begründen Sie jeweils auch, warum das Integral existiert und skizzieren Sie den Integranden.

1. $\displaystyle\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 f\,df$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x}+2011\right)^{2010}}{\sqrt{x}}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-1}^3 |x^2-2|\,dx$
4. $\displaystyle\int_4^n \frac{1}{x^2}\,dx,\quad$ wobei $n \in \mathbb{N}_{>3}$ ist

Aufgabe 2 (Abschätzungen/Mittelwerte des Integrals)**.** Nonewt und Einbliz schwelgen in Integralen:

Einbliz Ich habe soeben die Krönung der Integralrechnung entdeckt: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und ist $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)\cdot(b-a) \leq \int_a^b f \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)\cdot(b-a).$$

Nonewt Das ist noch gar nichts! Es gilt nämlich sogar der Nonewtsche Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Gelten die Behauptungen von Einbliz bzw. Nonewt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (Integration und Quadrate)**.** Sei $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei

$$\begin{aligned} f^2\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)\cdot f(x) \end{aligned}$$

1. Sei f^2 Riemann-integrierbar. Ist dann auch f Riemann-integrierbar?
2. Seien f und f^2 Riemann-integrierbar. Gilt dann bereits $\left(\int_0^1 f\right)^2 = \int_0^1 (f^2)$?

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Integral und Maximumsfunktion)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\begin{aligned} f_+\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \max\bigl(0, f(x)\bigr) \end{aligned}$$

Riemann-integrierbar ist, indem Sie wie folgt vorgehen:

1. Zeigen Sie, dass eine beschränkte Funktion $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Partition P von $[a,b]$ mit
$$\overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P) \leq \varepsilon$$
gibt.

   Hinweis. Für die „Hinrichtung" werden Verfeinerungen nützlich sein …

2. Zeigen Sie: Sind $s, t \in [a,b]$ mit $s < t$, so ist
$$\sup_{x\in[s,t)} f_+(x) - \inf_{x\in[s,t)} f_+(x) \leq \sup_{x\in[s,t)} f(x) - \inf_{x\in[s,t)} f(x).$$

   Hinweis. Machen Sie eine Fallunterscheidung, die berücksichtigt, welche Vorzeichen die Werte von f auf $[s,t)$ annehmen.

3. Folgern Sie: Für alle Partitionen P von $[a,b]$ gilt
$$\overline{S}(f_+,P) - \underline{S}(f_+,P) \leq \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P).$$

4. Schließen Sie, dass f_+ Riemann-integrierbar ist.

Bonusaufgabe (Integrationstest)**.** Commander Blorx möchte aus steuerrechtlichen Gründen in der Galaxie Mysteriem eingebürgert werden. Die Behörden sind nicht gerade begeistert von der Aussicht, dass Blorx demnächst ein Mysteriemianer ist und verlangen daher aus „verwaltungstechnischen" Gründen, dass Blorx einen Integrationstest besteht; dieser enthält nur eine einzige Frage – nämlich, welchen Wert der Ausdruck

$$\int_{-e}^{e} \frac{\cos(x^{2011}) + \ln\bigl(|x| + 2011\bigr)}{\sqrt[42]{x^{2012} + \sqrt[2011]{|x|}\cdot e^{(x^{2011})} + |\sin x| + 2012}}\,dx \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x^{2011})\cdot \ln\bigl(|x| + 2010\bigr)}{\sqrt[42]{\bigl(\cos(x^{2011})\bigr)^{2010} + \sqrt[2011]{|x|}\cdot e^{(x^{2012})} + |x| + 2011}}\,dx$$

besitzt. Blorx denkt kurz nach, murmelt „Hah, das ist genauso wie bei Untris (http://ded.increpare.com/~locus/untris/): Integrieren ist dasselbe wie Differenzieren – nur andersherum!", und verkündet dann das Ergebnis seiner Berechnung.

Was ist die korrekte Anwort?

Hinweis. Don't panic!

Abgabe bis zum **27. Juli 2011 (Mittwoch!)**, 12:00 Uhr, in die Briefkästen