Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 12 vom 22. Juli 2011

Ah-ha! Now I've got the bead on you with MY disintegrating pistol!
And brother, when it disintegrates, it disintegrates!
[Pulls trigger; the pistol disintegrates]
Heh, what do you know . . . It disintegrated.

Daffy Duck, *Duck Dodgers in the 24th 1/2 Century*

Aufgabe 1 (Integrale)**.** Bestimmen Sie die folgenden Integrale; begründen Sie jeweils auch, warum das Integral existiert und skizzieren Sie den Integranden.

1. $\displaystyle\int_0^1 x\; dx - \int_0^1 f\; df$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\big(\sqrt{x}+2011\big)^{2010}}{\sqrt{x}}\; dx$
3. $\displaystyle\int_{-1}^3 |x^2-2|\; dx$
4. $\displaystyle\int_4^n \frac{1}{x^2}\; dx,$ wobei $n \in \mathbb{N}_{>3}$ ist

Lösungshinweise. Die angegebenen Funktionen sind als Kompositionen stetiger Funktionen stetig, also integrierbar.

1. Es ist $\int_0^1 x\; dx - \int_0^1 f\; df = \int_0^1 x\; dx - \int_0^1 x\; dx = 0$.
2. Sei

$$\begin{aligned} f\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \big(\sqrt{x}+2011\big)^{2011}. \end{aligned}$$

Nach den Vererbungseigenschaften differenzierbarer Funktionen ist $f \in C^1([1,2],\mathbb{R})$ und mit der Kettenregel erhalten wir für alle $x \in (1,2)$, dass

$$f'(x) = 2011 \cdot \big(\sqrt{x}+2011\big)^{2010} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}.$$

Also folgt mit dem (zweiten) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\big(\sqrt{x}+2011\big)^{2010}}{\sqrt{x}}\; dx &= \frac{2}{2011} \cdot \int_1^2 f' \\ &= \frac{2}{2011} \cdot \big(\sqrt{2}+2011\big)^{2011} - \frac{2}{2011}\big(\sqrt{1}+2011\big)^{2011}. \end{aligned}$$

[Man kann dies alternativ z.B. auch mittels des binomischen Lehrsatzes nachrechnen.]

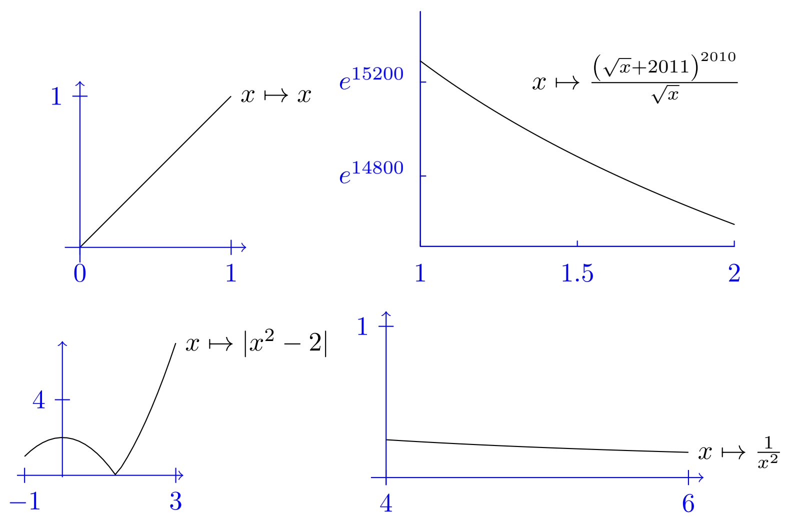
3. Nach Definition der Betragsfunktion und dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} |x^2-2|\ dx &= \int_{-1}^{\sqrt{2}} |x^2-2|\ dx + \int_{\sqrt{2}}^{3} |x^2-2|\ dx \\ &= \int_{-1}^{\sqrt{2}} (2-x^2)\ dx + \int_{\sqrt{2}}^{3} (x^2-2)\ dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}\cdot x^3 + 2\cdot x\right]_{x=-1}^{x=\sqrt{2}} + \left[\frac{1}{3}\cdot x^3 - 2\cdot x\right]_{x=\sqrt{2}}^{x=3} \\ &= \frac{14}{3} + \frac{8}{3}\cdot\sqrt{2}.\end{aligned}$$

4. Für alle $n \in \mathbb{N}_{>3}$ ist (nach dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$$\int_4^n \frac{1}{x^2}\ dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{x=4}^{x=n} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{4}.$$

5. Skizzen der Funktionen (die zweite Funktion wird mit exponentiell skalierter Ordinatenachse dargestellt):



Aufgabe 2 (Abschätzungen/Mittelwerte des Integrals)**.** Nonewt und Einbliz schwelgen in Integralen:

Einbliz Ich habe soeben die Krönung der Integralrechnung entdeckt: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und ist $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) \cdot (b-a).$$

Nonewt Das ist noch gar nichts! Es gilt nämlich sogar der Nonewtsche Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f = f(\xi) \cdot (b-a).$$

Gelten die Behauptungen von Einbliz bzw. Nonewt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungshinweise.

- Einbliz hat Recht, denn: Nach Definition gilt

$$\forall_{z\in[a,b]} \quad \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq f(z) \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

  Damit folgt die Behauptung aus der Monotonie des Riemann-Integrals (angewandt auf f und die beiden konstanten Funktionen $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ und $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$) und der Berechnung des Riemann-Integrals für konstante Funktionen.

- Nonewt irrt sich, jedenfalls wenn man nur voraussetzt, dass f Riemann-integrierbar ist: Ein Gegenbeispiel ist zum Beispiel die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [-1,1] &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{falls } \quad 0 < x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

  Das Integral dieser Funktion ist Null, aber $f(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in [-1,1]$.

Aufgabe 3 (Integration und Quadrate)**.** Sei $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei

$$\begin{aligned} f^2\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

1. Sei f^2 Riemann-integrierbar. Ist dann auch f Riemann-integrierbar?
2. Seien f und f^2 Riemann-integrierbar. Gilt dann bereits $\bigl(\int_0^1 f\bigr)^2 = \int_0^1 (f^2)$?

Lösungshinweise.

1. Im allgemeinen gilt dies nicht, denn: Man betrachte etwa die Funktion

$$\begin{aligned} f := \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} - \chi_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]}\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist $f^2 = 1$ auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar, aber f ist dies nicht. [In jedem nicht-trivialen Teilintervall von $[0,1]$ liegen rationale und irrationale Punkte, daher gilt $\overline{S}(f,P) = 1$ und $\underline{S}(f,P) = -1$ für jede Partition P von $[0,1]$; also kann f nicht Riemann-integrierbar sein].

2. Nein, denn: Zum Beispiel gilt für $f := \mathrm{id}_{[0,1]} - 1/2 \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ (was als stetige Funktion Riemann-integrierbar ist) einerseits $\bigl(\int_0^1 f\bigr)^2 = 0$ aber andererseits $\int_0^1 (f^2) = 1/12$.

Aufgabe 4 (Integral und Maximumsfunktion)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$ und sei $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\begin{aligned} f_+ \colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \max\bigl(0, f(x)\bigr) \end{aligned}$$

Riemann-integrierbar ist, indem Sie wie folgt vorgehen:

1. Zeigen Sie, dass eine beschränkte Funktion $g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Partition P von $[a,b]$ mit
$$\overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P) \le \varepsilon$$
gibt.

   Hinweis. Für die „Hinrichtung“ werden Verfeinerungen nützlich sein …

2. Zeigen Sie: Sind $s, t \in [a,b]$ mit $s < t$, so ist
$$\sup_{x \in [s,t)} f_+(x) - \inf_{x \in [s,t)} f_+(x) \le \sup_{x \in [s,t)} f(x) - \inf_{x \in [s,t)} f(x).$$

   Hinweis. Machen Sie eine Fallunterscheidung, die berücksichtigt, welche Vorzeichen die Werte von f auf $[s,t)$ annehmen.

3. Folgern Sie: Für alle Partitionen P von $[a,b]$ gilt
$$\overline{S}(f_+,P) - \underline{S}(f_+,P) \le \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P).$$

4. Schließen Sie, dass f_+ Riemann-integrierbar ist.

Lösungshinweise.

1. Sei $g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Nach Definition ist g genau dann Riemann-integrierbar, wenn
$$\sup\bigl\{\underline{S}(g,P) \bigm| P \text{ Partition von } [a,b]\bigr\} = \inf\bigl\{\overline{S}(g,P) \bigm| P \text{ Partition von } [a,b]\bigr\}$$
ist.

   – Gibt es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Partition P von $[a,b]$ mit der Eigenschaft, dass $\overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P) \le \varepsilon$, so folgt insbesondere, dass
$$\inf\bigl\{\overline{S}(g,P) \bigm| P \text{ Partition von } [a,b]\bigr\} \le \sup\bigl\{\underline{S}(g,P) \bigm| P \text{ Partition von } [a,b]\bigr\};$$
andererseits gilt nach Definition der Unter-/Obersummen aber auch für alle Partitionen P von $[a,b]$, dass $\overline{S}(g,P) \ge \underline{S}(g,P)$. Daher stimmen das Infimum und das Supremum überein, d.h. g ist Riemann-integrierbar.

- Sei umgekehrt g Riemann-integrierbar und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$; dann existieren nach Definition von Supremum/Infimum Partitionen $\underline{P}$ und $\overline{P}$ von $[a,b]$ mit

$$\sup\{\underline{S}(f,P) \mid P \text{ Partition von } [a,b]\} \leq \underline{S}(f,\underline{P}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

  und

$$\overline{S}(f,\overline{P}) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf\{\overline{S}(f,P) \mid P \text{ Partition von } [a,b]\}.$$

  Also folgt

$$\overline{S}(f,\overline{P}) - \underline{S}(f,\underline{P}) \leq \varepsilon.$$

  Sei P eine Verfeinerung von $\overline{P}$ und $\underline{P}$ (eine solche existiert). Dann ist (analog zu Argumenten in der Vorlesung)

$$\overline{S}(g,P) \leq \overline{S}(g,\overline{P}) \qquad \text{und} \qquad \underline{S}(g,P) \geq \underline{S}(g,\underline{P}),$$

  und damit

$$\overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P) \leq \overline{S}(g,\overline{P}) - \underline{S}(g,\underline{P}) \leq \varepsilon,$$

  wie gewünscht.

2. Wir machen eine Fallunterscheidung, die berücksichtigt, welche Vorzeichen die Werte von f auf $[s,t)$ annehmen:

   - Falls f auf $[s,t)$ nur positive Werte annimmt, so ist die Aussage wegen $f_+|_{[s,t)} = f|_{[s,t)}$ klar.
   - Nimmt f auf $[s,t)$ nur negative Werte an, so gilt $f_+|_{[s,t)} = 0$ und die Aussage ist ebenfalls klar.
   - Nimmt f auf $[s,t)$ positive und negative Werte an, so gilt

$$\sup_{x\in[s,t)} f_+(x) = \sup_{x\in[s,t)} f(x) \qquad \text{und} \qquad \inf_{x\in[s,t)} f_+(x) = 0,$$

     woraus die Behauptung folgt.

3. Sei $P = (t_0,\dots,t_n)$ eine Partition von $[a,b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f_+,P) - \underline{S}(f_+,P) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{x\in[t_j,t_j+1)} f_+(x)\cdot(t_{j+1}-t_j) - \sum_{j=0}^{n-1} \inf_{x\in[t_j,t_j+1)} f_+(x)\cdot(t_{j+1}-t_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\sup_{x\in[t_j,t_j+1)} f_+(x) - \inf_{x\in[t_j,t_j+1)} f_+(x) \Big)\cdot(t_{j+1}-t_j) \\
&\overset{(2.)}{\leq} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\sup_{x\in[t_j,t_j+1)} f(x) - \inf_{x\in[t_j,t_j+1)} f(x) \Big)\cdot(t_{j+1}-t_j) \\
&= \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P).
\end{aligned}$$

4. Dass f_+ Riemann-integrierbar ist, folgt nun, indem man die Erkenntnisse aus dem ersten und dem dritten Teil kombiniert.

Bonusaufgabe (Integrationstest)**.** Commander Blorx möchte aus steuerrechtlichen Gründen in der Galaxie Mysteriem eingebürgert werden. Die Behörden sind nicht gerade begeistert von der Aussicht, dass Blorx demnächst ein Mysteriemianer ist und verlangen daher aus „verwaltungstechnischen“ Gründen, dass Blorx einen Integrationstest besteht; dieser enthält nur eine einzige Frage – nämlich, welchen Wert der Ausdruck

$$\int_{-e}^{e} \frac{\cos(x^{2011}) + \ln\bigl(|x| + 2011\bigr)}{\sqrt[42]{x^{2012} + \sqrt[2011]{|x|} \cdot e^{(x^{2011})} + |\sin x| + 2012}}\, dx \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x^{2011}) \cdot \ln\bigl(|x| + 2010\bigr)}{\sqrt[42]{\bigl(\cos(x^{2011})\bigr)^{2010} + \sqrt[2011]{|x|} \cdot e^{(x^{2012})} + |x| + 2011}}\, dx$$

besitzt. Blorx denkt kurz nach, murmelt „Hah, das ist genauso wie bei Untris (http://ded.increpare.com/~locus/untris/): Integrieren ist dasselbe wie Differenzieren – nur andersherum!“, und verkündet dann das Ergebnis seiner Berechnung.

Was ist die korrekte Anwort?

Hinweis. Don't panic!

Lösungshinweise. Die Aufgabe ist einfacher als sie vielleicht erscheint. Die entscheidende Idee ist, auszunutzen, dass der Integrand des rechten Integrals „ungerade“ ist – daher ist das rechte Integral Null und damit ist auch das Produkt der beiden Integrale Null. Wir erklären dies nun etwas detaillierter:

- Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad f(-x) = f(x)$$

  gilt; sie heißt *ungerade*, falls

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad f(-x) = -f(x)$$

  gilt.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist natürlich $x \mapsto x^{2n}$ gerade und $x \mapsto x^{2n+1}$ ungerade; außerdem ist die Betragsfunktion gerade.

- Aus der Definition (Reihendarstellung) von Sinus und Cosinus folgt, dass Cosinus gerade und Sinus ungerade ist.

- Indem man diese Resultate zusammensetzt, sieht man, dass die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sin(x^{2011}) \cdot \ln\bigl(|x| + 2010\bigr)}{\sqrt[42]{\bigl(\cos(x^{2011})\bigr)^{2010} + \sqrt[2011]{|x|} \cdot e^{(x^{2012})} + |x| + 2011}} \end{aligned}$$

  ungerade ist. Außerdem ist diese Funktion stetig (und somit insbesondere Riemann-integrierbar).

- Ist $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade und stetige Funktion und ist $a \in \mathbb{R}_{>0}$, so gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$, denn: Sei $P = (t_0, \dots, t_n)$ eine Partition von $[-a, 0]$ und $-P := (-t_n, \dots, -t_0)$ die „gespiegelte“ Partition von $[0, a]$ [dies liefert eine eins-zu-eins-Beziehung zwischen den Partitionen von $[-a, 0]$ und denen von $[0, a]$]. Dann gilt für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$, dass

$$\begin{aligned}\inf\bigl\{f(x) \bigm| x \in [t_j, t_{j+1})\bigr\} &= \inf\bigl\{f(-x) \bigm| x \in (-t_{j+1}, -t_j]\bigr\} \\ &= \inf\bigl\{-f(x) \bigm| x \in (-t_{j+1}, -t_j]\bigr\} \\ &= -\sup\bigl\{f(x) \bigm| x \in (-t_{j+1}, -t_j]\bigr\} \\ &= -\sup\bigl\{f(x) \bigm| x \in [-t_{j+1}, -t_j)\bigr\};\end{aligned}$$

die letzte Gleichung folgt dabei aus der Stetigkeit von f.

Daher ist $\overline{S}(f|_{[-a,0]}, P) = -\underline{S}(f|_{[0,a]}, -P)$ und analog $\underline{S}(f|_{[-a,0]}, P) = -\overline{S}(f|_{[0,a]}, -P)$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}&\sup\bigl\{\underline{S}(f_{[-a,0]}, P) \bigm| P \text{ Partition von } [-a, 0]\bigr\} \\ &= \sup\bigl\{-\overline{S}(f_{[0,a]}, P) \bigm| P \text{ Partition von } [-a, 0]\bigr\} \\ &= -\inf\bigl\{\overline{S}(f_{[0,a]}, -P) \bigm| P \text{ Partition von } [-a, 0]\bigr\}. \\ &= -\inf\bigl\{\overline{S}(f_{[0,a]}, Q) \bigm| Q \text{ Partition von } [0, a]\bigr\}.\end{aligned}$$

Also ist das Unterintegral von f auf $[-a, 0]$ gerade das additive Inverse des Oberintegrals von f auf $[0, a]$; da die Funktion f Riemann-integrierbar ist, folgt

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

Daraus folgt die Aussage.

[Dies gilt nicht nur für stetige ungerade Funktionen, sondern für alle Riemann-integrierbaren ungeraden Funktionen (dann ist der Beweis technisch aber etwas aufwendiger); außerdem kann man diese Symmetrieeigenschaft auch mit Integration durch Substitution erhalten.]

– Mit den beiden gerade gemachten Feststellungen erhält man also, dass das rechte Integral Null sein muss; das Produkt der beiden Integrale ist also ebenfalls Null.