Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank Blatt 13 vom 1. August 2011

To infinity ... and beyond!
Buzz Lightyear, *Toy Story*

Aufgabe 1 (Flächeninhalt des Halbkreises). Zeigen Sie $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi/2$, indem Sie wie folgt vorgehen:

1. Zeigen Sie, dass $\sin^2 + \cos^2 = 1$ ist.

   Hinweis. Betrachten Sie die Ableitung und berechnen Sie den Wert an der Stelle 0.

2. Folgern Sie, dass $\sin(\pi/2) = 1$ und $\sin(-\pi/2) = -1$ ist.

3. Zeigen Sie: Für alle $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ ist $\cos(x) \geq 0$.

   Hinweis. Betrachten Sie die Definition von π, von cos und den Zwischenwertsatz.

4. Zeigen Sie, dass $(\cos \cdot \sin + \mathrm{id}_{\mathbb{R}})' = 2 \cdot \cos^2$ ist.

5. Berechnen Sie nun das Integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ durch Subsitution (mit Hilfe der Sinus-Funktion).

Aufgabe 2 (Integralkriterium für Konvergenz von Reihen).

1. Sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine monoton fallende Funktion, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf $[0,n]$ Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ genau dann konvergiert, wenn die Folge $\bigl(\int_0^n f\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

   Hinweis. Betrachten Sie geeignete Unter- und Obersummen von f.

2. Folgern Sie: Ist $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ genau dann, wenn $s > 1$ ist.

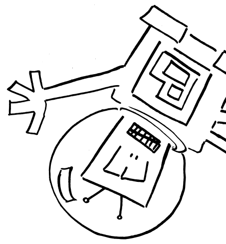
Aufgabe 3 (Uneigentliche Integrale). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und es sei $f\colon (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für alle $t \in (a,b]$ die Einschränkung $f|_{[t,b]}$ auf $[t,b]$ Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{(a,b]\ni t\to a} \int_t^b f$ existiert, so nennt man

$$\int_a^b f := \lim_{(a,b]\ni t\to a} \int_t^b f$$

das *uneigentliche Integral von f auf* $[a,b]$. Analog definiert man uneigentliche Integrale, wenn eine der Grenzen ∞ oder $-\infty$ ist.

1. Für welche $s \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$?

2. Für welche $s \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx$?



Aufgabe 4 (Abschätzung des Restglieds in Integralform für die Taylorentwicklung des natürlichen Logarithmus)**.**

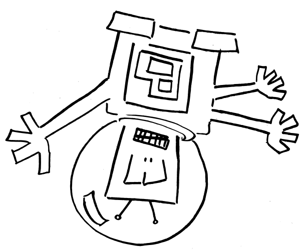
1. Zeigen Sie: Für alle $x \in [0,1)$ und alle $N \in \mathbb{N}$ ist
$$\left| \int_1^{1+x} \frac{(1+x-s)^N}{s^{N+1}} \, ds \right| \leq x^{N+1}.$$
Hinweis. Schätzen Sie den Integranden geeignet ab.

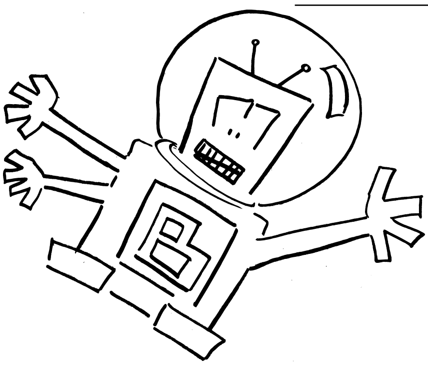
2. Zeigen Sie: Für alle $x \in (-1,0)$ und alle $N \in \mathbb{N}$ ist
$$\left| \int_1^{1+x} \frac{(1+x-s)^N}{s^{N+1}} \, ds \right| \leq \frac{|x|^{N+1}}{1+x}.$$
Hinweis. Schätzen Sie den Integranden geeignet ab.

3. Folgern Sie, dass die Taylorreihe des natürlichen Logarithmus um 1 in $(0,2)$ gegen den natürlichen Logarithmus konvergiert.

Bonusaufgabe. Aufgrund der Vorkommnisse in den letzten Monaten wird Commander Blorx auf den einsamen Asteroiden Fern-Meter-Eeiss verbannt. Großzügigerweise darf er zwei Bücher mitnehmen. Er entscheidet sich für *Die Hilbertschen Probleme* (Verlag Harri Deutsch, Nachdruck, 1998) und *Problem solving strategies* (A. Engel, Springer, 1998).

Lesen Sie aus Solidarität mit Blorx auch *Die Hilbertschen Probleme* und lösen Sie alle Aufgaben aus *Problem solving strategies*!





keine Abgabe