Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 1 vom 6. Mai 2011

Logic, logic, logic. Logic is the beginning of wisdom, Valeris, not the end.
Spock, *Star Trek VI*

Aufgabe 1 (Aussagenlogik)**.** Seien A, B, C aussagenlogische Variablen. Sind die folgenden aussagenlogischen Formeln Tautologien? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $(A \lor B) \Longrightarrow A$
2. $(A \land B) \Longrightarrow A$
3. $\bigl(\neg(A \Longrightarrow B)\bigr) \Longleftrightarrow (A \land \neg B)$
4. $\bigl(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)\bigr) \Longleftrightarrow \bigl((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C\bigr)$

Lösungshinweise.

1. Dies ist keine Tautologie, denn: Ist A falsch und B wahr, so ist $A \lor B$ wahr, aber nicht A und daher ist $(A \lor B) \Longrightarrow A$ falsch.
2. Dies ist eine Tautologie, denn: Die zugehörige Wahrheitstafel hat die Form

A	B	$A \land B$	$(A \land B) \Longrightarrow A$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	f	f	w
f	w	f	w

3. Dies ist eine Tautologie, denn: Dies können wir zum Beispiel an folgender Wahrheitstafel ablesen:

A	B	$A \Longrightarrow B$	$A \land \neg B$	$\bigl(\neg(A \Longrightarrow B)\bigr) \Longleftrightarrow (A \land \neg B)$
w	w	w	f	w
w	f	f	w	w
f	f	w	f	w
f	w	w	f	w

   Alternativ kann man auch die bereits bekannte Tautologie

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \lor B)$$

   und die de Morganschen Regeln verwenden, um einen Beweis abzuleiten.

4. Dies ist keine Tautologie, denn: Man betrachte zum Beispiel den Fall, dass A und C falsch sind (und B beliebig). Dann gilt $\bigl(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)\bigr)$ da A falsch ist (ex falso quodlibet) und genauso gilt $(A \Longrightarrow B)$. Aber da C falsch ist, ist $\bigl((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C\bigr)$ falsch, und die Aussage daher keine Tautologie.

Aufgabe 2 (Folgerungen aus Axiomen)**.** Beweisen Sie, dass die Aussage

Der Venusmond Tetra hat seine Umlaufbahn nicht verlassen.

logisch aus den folgenden Axiomen folgt:

① Keiner, der ausgestorben ist, ist Professor Pirkheimer.

② Wenn ein Mond nicht auf die Erde zurast, hat er seine Umlaufbahn nicht verlassen.

③ Es gibt einen Pinguin, Tux.

④ Tetra ist ein Mond der Venus.

⑤ Wenn ein Mond auf die Erde zurast, fallen alle Pinguine um oder alle Dinosaurier sterben aus.

⑥ Professor Pirkheimer ist ein Dinosaurier und Tux ist nicht umgefallen.

Lösungshinweise. Wir formulieren diesen Beweis umgangssprachlich (es ist aber nicht schwierig, einen formalen Beweis daraus zu konstruieren). Nach Axiom ⑥ ist Professor Pirkheimer ein Dinosaurier (und er existiert) und nach Axiom ① ist er nicht ausgestorben. Daher gibt es also einen Dinosaurier, der nicht ausgestorben ist.

Nach Axiom ③ gibt es einen Pinguin mit Namen Tux und nach Axiom ⑥ ist dieser nicht umgefallen. Damit gibt es also einen Pinguin, der nicht umgefallen ist.

Axiom ⑤ ist (nach Kontraposition und den de Morganschen Regeln) gleichbedeutend zu:

⑤' Wenn es einen Pinguin gibt, der nicht umgefallen ist, und einen Dinosaurier, der nicht ausgestorben ist, dann rast kein Mond auf die Erde zu.

Nach dem bisher gezeigten wissen wir also, dass kein Mond auf die Erde zurast.

Nach Axiom ② hat daher kein Mond seine Umlaufbahn verlassen, und nach Axiom ④ hat daher insbesondere Tetra seine Umlaufbahn nicht verlassen, wie wir behauptet haben.

Aufgabe 3 (Grundlegende Eigenschaften von Mengen)**.**

1. Zeigen Sie: Für alle Mengen A, B, C gilt
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$
illustrieren Sie Ihren Beweis durch geeignete Bilder.

2. Seien A und B Mengen. Zeigen Sie, dass A genau dann eine Teilmenge von B ist, wenn $P(A) \subset P(B)$ gilt.

Lösungshinweise.

1. Wir beweisen die Aussage, indem wir zeigen, dass jedes Element in der einen Menge auch in der anderen Menge liegt und umgekehrt.

   Sei $x \in (A \cap B) \cup C$. Dann liegt x in C oder in $A \cap B$. Im erstem Fall liegt x sowohl in $A \cup C$ als auch in $B \cup C$ und damit in $(A \cup C) \cap (B \cup C)$. Im zweiten

Fall liegt x sowohl in A, und daher auch in $A \cup C$, als auch in B, und daher auch in $B \cup C$. Also liegt x in beiden Fällen in $(A \cup C) \cap (B \cup C)$. Damit haben wir gezeigt, dass jedes Element aus $(A \cap B) \cup C$ in $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ liegt (oder mit anderen Worten, dass $(A \cap B) \cup C \subset ((A \cup C) \cap (B \cup C))$ gilt).

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion: Sei $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Dann liegt x in $A \cup C$ und in $B \cup C$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) Es gelte $x \in C$. Dann gilt natürlich auch $x \in (A \cap B) \cup C$ und es bleibt nichts mehr zu zeigen.

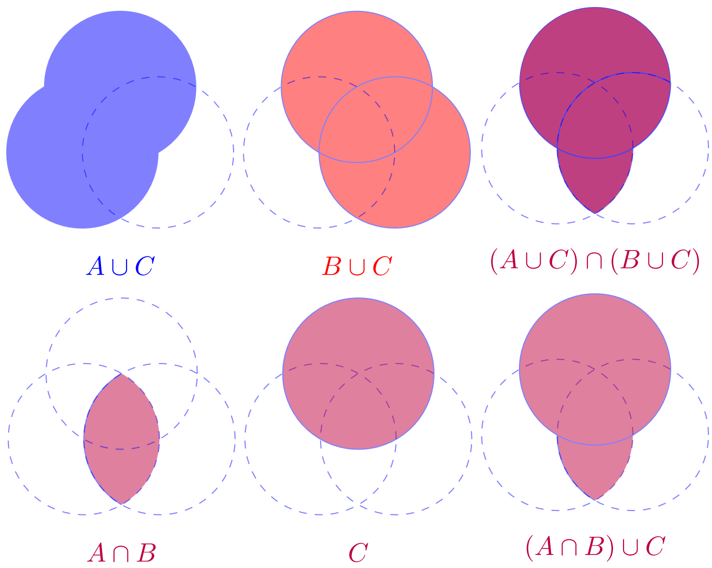
(b) Es gelte $x \notin C$. Dann folgt aus $x \in (A \cup C)$ bereits $x \in A$ und aus $x \in (B \cup C)$ bereits $x \in B$, also $x \in A \cap B$ und damit $x \in (A \cap B) \cup C$.

In beiden Fällen erhalten wir also $x \in (A \cap B) \cup C$. Damit folgt

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C.$$

Insgesamt haben wir daher die Gleichheit $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ gezeigt.

Diese Situation können wir folgt illustrieren:



2. Sei A eine Teilmenge von B. Ist $C \in P(A)$, so ist C eine Teilmenge von A, und wegen $A \subset B$ folgt, dass dann auch $C \subset B$ gilt. Also ist $C \in P(B)$. Somit gilt $P(A) \subset P(B)$.

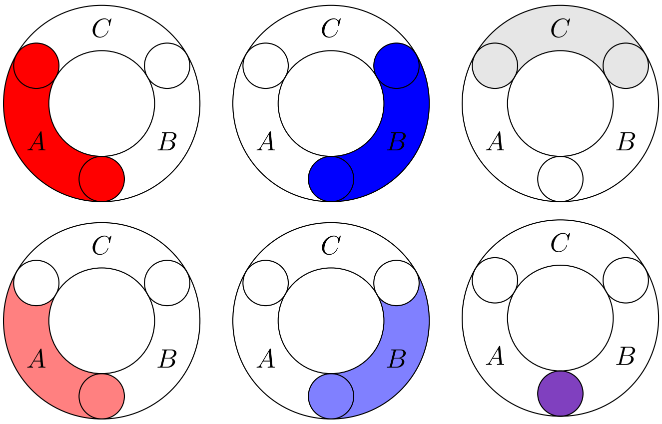
   Umgekehrt gelte $P(A) \subset P(B)$. Wegen $A \subset A$ ist $A \in P(A)$, und damit $A \in P(B)$. Nach Definition der Potenzmenge gilt daher auch $A \subset B$.

   Also ist A genau dann eine Teilmenge von B, wenn $P(A) \subset P(B)$ gilt.

Aufgabe 4 (Schnittmengen)**.** Nonewt erzählt Einbliz voller Stolz von seinen Fortschritten in der Mengenlehre:

Nonewt Hach, ich habe einen wahrhaft wunderbaren Beweis dafür, dass für alle Mengen A, B, C die Gleichheit $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = A \cap B$ gilt: Der Beweis ist graphisch. Wir sehen uns einfach die drei Mengen an [er zeigt auf untenstehende Skizzen], und färben A mit rot, B mit blau und C mit grau. Dann ist $A \setminus C$ der hellrote Bereich, $B \setminus C$ der hellblaue Bereich, und $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ der violette Bereich. Dieser stimmt jedoch, wie man leicht sieht, mit $A \cap B$ überein.

Einbliz Urx, was für schaurige Farben; und auf Deine magischen Bilder falle ich sowieso nicht rein!



Können Sie weiterhelfen? Genauer: Finden Sie mindestens einen Fehler im obigen Argument, und beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Für alle Mengen A, B, C gilt $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = A \cap B$.

Lösungshinweise. Der Fehler, dem Nonewt hier erliegt, ist dass seine hübschen Bilder nur einen Spezialfall zeigen – die von ihm dargestellten Mengen A, B, C haben trivialen Schnitt, $A \cap B \cap C = \emptyset$. Im allgemeinen müssen drei Mengen aber nicht diese Eigenschaft haben, man denke nur an den Fall $A = B = C$! Dies führt uns auch direkt zu einem Gegenbeispiel für die behauptete Aussage $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = A \cap B$: Man betrachte Mengen A, B, C mit $A = B = C \neq \emptyset$ (z.B. $A = B = C = \{\emptyset\}$). Dann gilt

$$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \setminus A) \cap (A \setminus A) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset,$$

aber

$$A \cap B = A \cap A = A \neq \emptyset.$$

Man beachte also: Skizzen und Bilder sind eine unerlässliche Quelle für das mathematische Verständnis, aber sie ersetzen keinen Beweis. Man kann erst behaupten, dass man etwas anschaulich verstanden hat, wenn man prinzipiell in der Lage wäre, die Aussage auch zu beweisen. Viele Resultate der Mathematik sind gerade dadurch interessant, dass sie unsere anschaulich-naive Vorstellung unterwandern und dadurch unseren Horizont erweitern. Einige davon werden Sie im Laufe Ihres Studiums noch kennenlernen.

Bonusaufgabe (Paare durch Mengen?). Wegen eines technischen Defekts muss Commander Blorx auf dem Planeten Praion notlanden. Auf Praion gibt es zwar die Grundbegriffe der Mengenlehre, aber keine Paare (im mengentheoretischen Sinne); genau diese benötigt Blorx jedoch um den Produktifikator seines Ufos zu reparieren. Blorx denkt eine Weile nach und definiert dann für alle x, y:

$$\langle x, y\rangle := \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}.$$

Modelliert dies tatšachlich geordnete Paare? D.h. gilt für alle Mengen x, y, x', und y' die Äquivalenz

$$\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \iff \big((x = x') \wedge (y = y')\big) \quad ?$$

Lösungshinweise. Dies ist tatsächlich eine Möglichkeit, geordnete Paare zu modelieren, denn: Seien x, y, x', y' gegeben.

- Es gelte $x = x'$ und $y = y'$. Dann ist insbesondere auch $\{x\} = \{x'\}$ und $\{x, y\} = \{x', y'\}$, und damit

  $$\big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} = \big\{\{x'\}, \{x', y'\}\big\}.$$

  (denn zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten). Nach Definition bedeutet dies, dass $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$.

- Es gelte umgekehrt $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$, d.h. $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

  1. Es gilt $x = y$. Dann ist $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$, und damit

     $$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}.$$

     Wegen der Gleichheit $\{\{x'\}, \{x', y'\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}\}$ gilt somit insbesondere $\{x', y'\} = \{x\}$, und daher $x' = y' = x$.

  2. Es gilt $x \neq y$. Dann ist $\{x, y\}$ eine Menge mit zwei verschiedenen Elementen. Aus der Gleichheit $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ folgt, dass auch $\{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ eine Menge mit zwei Elementen als Element enthält. Diese kann nur $\{x', y'\}$ sein.

     Eine Menge mit zwei verschiedenen Elementen kann nicht gleich einer Menge mit nur einem Element sein, also erhalten wir $\{x\} = \{x'\}$ und $\{x, y\} = \{x', y'\}$. Die erste Gleichheit liefert $x = x'$; daher folgt aus der zweiten Gleichheit auch $y = y'$.

  In beiden Fällen erhalten wir also $x = x'$ und $y = y'$.

Abgabe bis zum 13. Mai 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen

Bitte versehen Sie alle Ihre Lösungen mit Ihrem Namen
und dem Namen Ihres Übungsleiters!