Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank Blatt 3 vom 20. Mai 2011

EINE Is Not Emacs
ZWEI Was EINE Initially
GNU's Not Unix
Unix community, *Rekursive Akronyme*

Aufgabe 1 (Sind alle natürlichen Zahlen gleich?!)**.** Einbliz und Nonewt nehmen am Wettbewerb „Alle natürlichen Zahlen sind gleich!“ teil. Sie reichen die folgenden „Beweise“ ein:

Einbliz Wir beweisen die Aussage „Ist $n \in \mathbb{N}$ und besteht A aus genau n natürlichen Zahlen, so sind alle Elemente von A gleich“ durch vollständige Induktion:
Der Induktionsanfang ist klar: Ist A eine Menge, die keine Elemente enthält, so sind alle Elemente von A gleich.
Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $n \in \mathbb{N}$ ist und dass die Behauptung für alle Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit genau n Elementen gilt. Dann gilt sie auch für alle Teilmengen $A \subset \mathbb{N}$ mit genau $(n+1)$ Elementen, denn: Seien $A' \subset A$ bzw. $A'' \subset A$ die Teilmengen von A, die aus den „ersten“ n bzw. den „letzten“ n Elementen von A bestehen. Nach Induktionsvoraussetzung sind alle Elemente aus A' gleich und es sind alle Elemente aus A'' gleich. Wenn wir nun $A' \cap A''$ betrachten, so sehen wir, dass dann die Elemente aus A' aber auch zu den Elementen aus A'' gleich sein müssen. Also sind alle Elemente aus A gleich.

Nonewt Ich zeige das lieber mit etwas Arithmetik: Seien $n, m \in \mathbb{N}$. *Angenommen,* $n \neq m$. Ohne Einschränkung können wir $n < m$ annehmen. Durch elementare Umformungen (in $\mathbb{Z}$) folgt dann

$$n + 1 < m + 1$$

bzw.

$$\begin{aligned} n^2 + n - n \cdot m - m &= (n+1) \cdot (n-m) \\ &< (m+1) \cdot (n-m) \\ &= m \cdot n + n - m^2 - m, \end{aligned}$$

und damit

$$(n-m)^2 = n^2 - 2 \cdot n \cdot m + m^2 < 0.$$

Das Quadrat einer ganzen Zahl kann jedoch nicht kleiner sein als null; dies ist ein Widerspruch. Also ist $n = m$.

Die Jury befindet, dass beide Beweise nicht korrekt sind – erklären Sie, warum die Beweise falsch sind!

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Rechenregeln in den natürlichen Zahlen)**.** Sei $(N, 0, s)$ ein Tripel, das die Peano-Axiome erfüllt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen per Induktion:

1. Für alle $n \in N$ gilt $0 + n = n$.
2. Für alle $m, n \in N$ gilt $s(n) = s(0) + n$ und $n + s(m) = s(n) + m$.
3. Für alle $m, n \in N$ gilt $m + n = n + m$.
4. Für alle $k, m, n \in N$ gilt die folgende Kürzungsregel: Wenn $k + n = m + n$ ist, so folgt $k = m$.

Aufgabe 3 (Wohlordnungsprinzip)**.** Eine geordnete Menge $(X, \leq)$ *erfüllt das Wohlordnungsprinzip*, wenn jede nicht-leere Teilmenge von X ein bezüglich „$\leq$“ minimales Element enthält, d.h., wenn es für jedes $A \subset X$ mit $A \neq \emptyset$ ein Element $x \in A$ mit der Eigenschaft gibt, dass für alle $x' \in A$ gilt, dass $x \leq x'$.

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips, dass $\mathbb{N}$ das Wohlordnungsprinzip erfüllt.
2. Gilt das Wohlordnungsprinzip auch für $\mathbb{Z}$?
3. Gilt das Wohlordnungsprinzip auch für $\mathbb{Q}_{\geq 0}$?

Aufgabe 4 (Eine Funktionalungleichung)**.** Sei $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$f(n+1) > (f \circ f)(n)$$

gilt. Bestimmen Sie $f(2011)$.
Hinweis. Zeigen Sie zunächst die folgenden Aussagen:
– Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ ist $f(m) \geq n$.
– Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n+1) > f(n)$.

Bonusaufgabe. Commander Blorx legt aus Langeweile einen Zwischenstop auf dem Asteroiden Tobor, der ausschließlich von Robotern bewohnt wird, ein. Die Roboter laufen alle unter dem schrecklich veralteten Betriebssystem Sohipeon und sind daher anfällig für allerlei Viren. Die Roboter von Tobor sind jedoch dafür bekannt, dass sie so sehr Meister des logischen Denkens sind, dass sie selbst wenn sie infiziert sind, immer noch alle nur erdenklichen logischen Probleme perfekt lösen. Aus Tradition treffen sich alle Roboter alle 10000 Sekunden, um sich an einer zentralen Ladestation aufzuladen.

Besonders hoch ist für die Roboter die Gefahr mit dem Virus Crofmotis infiziert zu werden. Ist ein Roboter mit Crofmotis infiziert, so wird sein System derart kompromittiert, dass er selber nicht erkennen kann, ob er infiziert ist; er kann jedoch (ebenso wie nicht-infizierte Roboter) ohne Schwierigkeiten erkennen, ob ein anderer Roboter infiziert ist. Da die Angst, sich durch die Kommunikation mit infizierten Robotern anzustecken, groß ist, erfährt ein Roboter nie von anderen Robotern, ob er selbst infiziert ist. Sollte ein Roboter anderweitig herausfinden, dass er infiziert ist, so wird er sich sofort selbst zerstören.

Da die Roboter so sehr mit ihrer Crofmotis-Paranoia beschäftigt sind, dass sie sich weigern, Zeit mit Blorx zu verbringen, beschließt Blorx leicht verärgert, wieder abzureisen; zum Abschied sagt er: „Eure Sorge ist berechtigt – mindestens einer von euch ist mit Crofmotis infiziert! Viel Spaß in nächster Zeit!“.

Was wird passieren? Werden sich Roboter selbst zerstören? Wenn ja, wann?

Abgabe bis zum 27. Mai 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen