Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 4 vom 27. Mai 2011

Mephistopheles:
Gebraucht der Zeit, sie geht so schnell von hinnen,
Doch Ordnung lehrt Euch Zeit gewinnen.
Mein teurer Freund, ich rat' Euch drum
Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Dass er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn,
Und nicht etwa, die Kreuz' und Quer,
Irrlichteliere hin und her.

Johann Wolfgang von Goethe, *Faust*

Aufgabe 1 (Eigenschaften von Relationen)**.** Begründen Sie Ihre Antworten jeweils durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Sind alle Relationen reflexiv?
2. Sind alle Relationen symmetrisch oder anti-symmetrisch?
3. Ist die Relation
$$\bigl\{(n,n') \bigm| (n \in \mathbb{N}) \wedge (n' \in \mathbb{N}) \wedge \ (\exists_{m\in\mathbb{N}} \quad n \cdot m^2 = n')\bigr\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
auf $\mathbb{N}$ transitiv?
4. Ist die Relation
$$\bigl\{(n,n') \bigm| (n \in \mathbb{N}) \wedge (n' \in \mathbb{N}) \wedge \ (\exists_{m\in\mathbb{N}} \quad n \cdot m^2 = n')\bigr\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
auf $\mathbb{N}$ eine Ordnung auf $\mathbb{N}$?

Aufgabe 2 (Quadrate in angeordneten Körpern)**.** Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Für alle $x, y \in K$ ist $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.
(Verwenden Sie nur die Körperaxiome!)
2. Für alle $x \in K$ ist $x^2 \geq 0$.
3. Für alle $x \in K$ gilt genau dann $x^2 = 0$, wenn $x = 0$ ist.
4. Für alle $x, y \in K_{\geq 0}$ gilt genau dann $x^2 \leq y^2$, wenn $x \leq y$ ist.

Aufgabe 3 (Ungleichungen)**.**

1. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und sei $x \in K$ mit $x \geq -1$. Zeigen Sie, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Abschätzung gilt:
$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$
2. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (in $\mathbb{Q}$)
$$\sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} \geq \frac{n}{2} + 1.$$

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Quantoren- und Variablensalat)**.** Selbst Folgen bleiben nicht vom Tatendrang von Einbliz und Nonewt verschont:

Nonewt Und – zack! – schon habe ich wieder einen außerordentlich nützlichen Begriff definiert! Höre und staune:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem archimedischen angeordneten Körper $(K,\leq)$. Ein Element $a \in K$ ist ein *Nonewt-Punkt* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn folgendes gilt:

$$\forall_{N\in\mathbb{N}_{>0}} \quad \exists_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad |a_n - a| \leq \frac{1}{N}.$$

Einbliz Pah, wie kryptisch – nur zwei Quantoren! Und außerdem ist es doch einfach dasselbe wie zu sagen, dass ein Element $x \in K$ ein *Einbliz-Wert* einer Folge $(\varepsilon_a)_{a\in\mathbb{N}}$ in einem archimedischen angeordneten Körper $(K,\leq)$ ist, wenn folgendes gilt:

$$\forall_{n\in K_{>0}} \quad \forall_{\delta\in\mathbb{N}} \quad \exists_{a\in\mathbb{N}_{\geq\delta}} \quad |\varepsilon_a - x| \leq n.$$

Sind die beiden Begriffe äquivalent? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

Bonusaufgabe. Durch unglückliche Umstände gerät Commander Blorx in die recht eindimensionale Galaxie Antiolar (deren Sterne und Planeten genauso angeordnet sind wie die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$). Zunächst ist Blorx nicht gerade begeistert, in einer so unvollständigen Galaxie gelandet zu sein.

Seine Laune bessert sich jedoch schlagartig als er feststellt, dass er eine Route (d.h. eine Folge von Sternen/Planeten) durch Antiolar finden kann, für die jeder Stern/Planet der Galaxie ein Häufungspunkt ist.

Ist Blorx völlig übergeschnappt oder ist dies tatsächlich möglich?

Hinweis. Sei $(K,\leq)$ ein angeordneter Körper und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Ein Element $a \in K$ ist ein *Häufungspunkt* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn gilt:

$$\forall_{\varepsilon\in K_{>0}} \quad \forall_{N\in\mathbb{N}} \quad \exists_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Abgabe bis zum 3. Juni 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen