Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt $6\frac{1}{2}$ vom 13./14. Juni 2011

Ready are you? What know you of ready?
For eight hundred years have I trained Jedi.
My own counsel will I keep on who is to be trained.
A Jedi must have the deepest commitment, the most serious mind.
This one a long time have I watched.
All his life has he looked away ... to the future, to the horizon.
Never his mind on where he was.
Hmm? What he was doing. Hmph. Adventure. Heh. Excitement. Heh.
A Jedi craves not these things. You are reckless.
Yoda, *Star Wars (The Empire Strikes Back)*

Die folgenden Aufgaben bieten die Gelegenheit, den bisher gelernten Stoff nochmal zu wiederholen und eigene Defizite aufzudecken. Sie sollten versuchen, diese Aufgaben ohne Zuhilfenahme Ihrer Notizen oder sonstiger Materialien zu bearbeiten. Die Aufgaben (bis auf die Bonusaufgabe) sind so gewählt, dass Sie sie ohne Schwierigkeiten zügig lösen können sollten.

Aufgabe 1 (Aussagenlogik)**.** Seien A und B aussagenlogische Variablen. Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind aussagenlogische Tautologien?

1. $(A \land B) \Longrightarrow (A \lor B)$
2. $A \lor (B \land \neg B)$

Aufgabe 2 (Mengenlehre)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Für alle Mengen X ist $X \cap (X \cap \emptyset) = X$.
2. Für alle Mengen X ist $\{X\} \in P(P(X))$.

Aufgabe 3 (Induktion)**.**

1. Was ist das Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen?
2. Was ist das Wohlordnungsprinzip für die natürlichen Zahlen?

Aufgabe 4 (Summen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{j=0}^{n} j = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)$.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{j=0}^{n} j^2 = \bigl(\sum_{j=0}^{n} j\bigr)^2$.

Aufgabe 5 (Relationen)**.** Wir betrachten die folgende Relation „$\square$“ auf $\mathbb{R}$:

$$\square := \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \bigm| \exists_{n \in \mathbb{Z}} \quad x + n = y\bigr\}.$$

1. Ist diese Relation „$\square$“ auf $\mathbb{R}$ symmetrisch?
2. Ist diese Relation „$\square$“ auf $\mathbb{R}$ anti-symmetrisch?

Aufgabe 6 (Angeordnete Körper)**.** Welche der folgenden Aussagen gelten in allen angeordneten Körpern $(K, \leq)$?

1. $\forall_{y \in K_{\geq 0}} \quad \exists_{x \in K} \quad x^2 = y$
2. $\forall_{x \in K} \quad \exists_{y \in K_{\geq 0}} \quad x^2 = y$

Bitte wenden

Aufgabe 7 (Cauchyfolgen)**.** Welche der folgenden Aussagen gelten für alle Cauchyfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper $(K, \leq)$?

1. Ist $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in K, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in K.
2. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in K, so ist $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in K.

Aufgabe 8 (Konvergenz und Vollständigkeit)**.**

1. Wie ist Konvergenz von Folgen definiert?
2. Wie ist (Cauchy-)Vollständigkeit von angeordneten Körpern definiert?

Aufgabe 9 (Nullfolgen)**.** Welche der folgenden Aussagen gelten für alle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$?

1. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$, so ist $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$.
2. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$, so ist $(n/(n+1) \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 10 (Supremum/Infimum)**.** Welche der folgenden Aussagen gelten für alle nicht-leeren beschränkten Teilmengen A von $\mathbb{R}$?

1. Es ist $\sup A = -\sup\{-x \mid x \in A\}$.
2. Es ist $\sup A = -\inf\{-x \mid x \in A\}$.

Bonusaufgabe (Ein irrationales Manöver?)**.** Direkt nachdem Commander Blorx das Gravitationsfeld von e-Rule mit eiskaltem Kalkül tranzendiert hat (s. Bonusaufgabe von Blatt 6), ordnet Admiral U-O'Viel-Ill von e-Rule an, dass das Minenfeld um den Orbit von e-Rule aktiviert wird. Admiral U-O'Viel-Ill hat die Minen persönlich entworfen; sich an dem alten Sprichwort „Die Kuh liegt dicht in Err!“ orientierend, beschloss er, dass es genügt, wenn die Minen explodieren, wenn ein Raumschiff mit rationaler Geschwindigkeit vorbeifliegt.

Bei seiner Flucht von e-Rule hat das Ufo von Blorx die Geschwindigkeit (s. Bonusaufgabe von Blatt 6)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit von Commander Blorx *nicht* in $\mathbb{Q}$ liegt!

Hinweis. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt (s. Vorlesung diese Woche): Die Folge $(\sum_{k=0}^{n} x^k)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

---

keine Abgabe
(bei Fragen können Sie sich natürlich an Ihren Übungsleiter wenden
oder in der Zentralübung oder im Chat nachfragen)