Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt $6\frac{1}{2}$ vom 13./14. Juni 2011

Ready are you? What know you of ready?
For eight hundred years have I trained Jedi.
My own counsel will I keep on who is to be trained.
A Jedi must have the deepest commitment, the most serious mind.
This one a long time have I watched.
All his life has he looked away ... to the future, to the horizon.
Never his mind on where he was.
Hmm? What he was doing. Hmph. Adventure. Heh. Excitement. Heh.
A Jedi craves not these things. You are reckless.

Yoda, *Star Wars (The Empire Strikes Back)*

Die folgenden Aufgaben bieten die Gelegenheit, den bisher gelernten Stoff nochmal zu wiederholen und eigene Defizite aufzudecken. Sie sollten versuchen, diese Aufgaben ohne Zuhilfenahme Ihrer Notizen oder sonstiger Materialien zu bearbeiten. Die Aufgaben (bis auf die Bonusaufgabe) sind so gewählt, dass Sie sie ohne Schwierigkeiten zügig lösen können sollten.

Aufgabe 1 (Aussagenlogik)**.** Seien A und B aussagenlogische Variablen. Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind aussagenlogische Tautologien?

1. $(A \wedge B) \Longrightarrow (A \vee B)$
2. $A \vee (B \wedge \neg B)$

Lösungshinweise.

1. Ja, denn: Wir betrachten die zugehörige Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \Longrightarrow (A \vee B)$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	w
f	f	f	f	w
f	w	f	w	w

2. Nein, denn: Wir betrachten das folgende Fragment der zugehörigen Wahrheitstafel:

A	B	$B \wedge \neg B$	$A \vee (B \wedge \neg B)$
f	f	f	f

Aufgabe 2 (Mengenlehre)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Für alle Mengen X ist $X \cap (X \cap \emptyset) = X$.
2. Für alle Mengen X ist $\{X\} \in P(P(X))$.

Lösungshinweise.

1. Nein, denn: Für alle Mengen X ist $X \cap \emptyset = \emptyset$. Ist X nicht-leer, so folgt also $X \cap (X \cap \emptyset) = X \cap \emptyset = \emptyset \neq X$.

2. Ja, denn: Es ist $X \subset X$ und daher $X \in P(X)$; also ist $\{X\} \subset P(X)$, und damit $\{X\} \in P(P(X))$.

Aufgabe 3 (Induktion)**.**

1. Was ist das Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen?

2. Was ist das Wohlordnungsprinzip für die natürlichen Zahlen?

Lösungshinweise.

1. Sei E eine „Eigenschaft“ von Elementen von $\mathbb{N}$ und es gelte:

   – *Induktionsanfang.* Die Zahl 0 hat die Eigenschaft E.
   – *Induktionsschritt.* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Hat n die Eigenschaft E, so auch $n + 1$.

   Das *Induktionsprinzip* besagt, dass dann alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft E haben (Bemerkung 1.2 im Kurzskript).

2. Sei $A \subset \mathbb{N}$ eine nicht-leere Teilmenge der natürlichen Zahlen. Das *Wohlordnungsprinzip* besagt dann, dass A ein minimales Element enthält (Übungsblatt 3).

Aufgabe 4 (Summen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{j=0}^{n} j = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)$.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{j=0}^{n} j^2 = \left(\sum_{j=0}^{n} j\right)^2$.

Lösungshinweise.

1. Ja, denn beide Summen enthalten dieselben Summanden (und es handelt sich um endliche Summen).

2. Nein, denn: Es gilt zum Beispiel $(0+1+2)^2 = 9 \neq 5 = 0^2 + 1^2 + 2^2$.

Aufgabe 5 (Relationen)**.** Wir betrachten die folgende Relation „$\square$“ auf $\mathbb{R}$:

$$\square := \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \bigm| \exists_{n \in \mathbb{Z}} \quad x + n = y\bigr\}.$$

1. Ist diese Relation „$\square$“ auf $\mathbb{R}$ symmetrisch?

2. Ist diese Relation „$\square$“ auf $\mathbb{R}$ anti-symmetrisch?

Lösungshinweise.

1. Ja, denn: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \square y$, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $x + n = y$. Dann existiert auch ein $m \in \mathbb{Z}$ (nämlich $m = -n$) mit $y + m = x$. Also ist die Relation „$\square$“ auf $\mathbb{R}$ symmetrisch.

2. Nein, denn: Es ist zum Beispiel $1 \square 2$ und $2 \square 1$ da $1+1 = 2$ und $2+(-1) = 1$, aber natürlich ist $1 \neq 2$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 6 (Angeordnete Körper)**.** Welche der folgenden Aussagen gelten in allen angeordneten Körpern $(K, \leq)$?

1. $\forall_{y \in K_{\geq 0}} \quad \exists_{x \in K} \quad x^2 = y$
2. $\forall_{x \in K} \quad \exists_{y \in K_{\geq 0}} \quad x^2 = y$

Lösungshinweise.

1. Nein, denn: Mit der Standardordnung ist $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper und es ist $2 \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$; aber es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.
2. Ja, denn: Nach Aufgabe 2.2 von Blatt 4 gilt für alle $x \in K$, dass $x^2 \geq 0$.

Aufgabe 7 (Cauchyfolgen)**.** Welche der folgenden Aussagen gelten für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper $(K, \leq)$?

1. Ist $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in K, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in K.
2. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in K, so ist $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in K.

Lösungshinweise.

1. Nein, denn: Man betrachte etwa die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Ja, denn: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt
$$\big||a_n| - |a_m|\big| \leq |a_n - a_m|$$
(nach der „umgekehrten" Dreiecksungleichung). Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in K, so folgt mit dieser Abschätzung, dass auch $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in K ist.

[Ursprünglich begann die Aufgabe mit: „Welche der folgenden Aussagen gelten für alle Cauchyfolgen …"; dann macht die Aufgabe natürlich wenig Sinn …]

Aufgabe 8 (Konvergenz und Vollständigkeit)**.**

1. Wie ist Konvergenz von Folgen definiert?
2. Wie ist (Cauchy-)Vollständigkeit von angeordneten Körpern definiert?

Lösungshinweise.

1. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper $(K, \leq)$ heißt *konvergent*, falls es ein $a \in K$ mit folgender Eigenschaft gibt:
$$\forall_{\varepsilon \in K_{>0}} \quad \exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_{\geq N}} \quad |a_n - a| \leq \varepsilon.$$
2. Ein angeordneter Körper $(K, \leq)$ heißt *Cauchy-vollständig*, falls jede Cauchyfolge in K bereits in K konvergent ist.

Aufgabe 9 (Nullfolgen)**.** Welche der folgenden Aussagen gelten für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$?

1. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$, so ist $({a_n}^2)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$.

2. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$, so ist $(n/(n+1)\cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$.

Lösungshinweise.

1. Ja, denn: Dies folgt direkt aus den Grenzwertsätzen (Proposition 2.8; das punktweise Produkt zweier konvergenter Folgen konvergiert gegen das Produkt der Grenzwerte).
2. Ja, denn: Dies folgt ebenfalls aus dem zitierten Grenzwertsatz, da die Folge $(n/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 10 (Supremum/Infimum)**.** Welche der folgenden Aussagen gelten für alle nicht-leeren beschränkten Teilmengen A von $\mathbb{R}$?

1. Es ist $\sup A = -\sup\{-x \mid x \in A\}$.
2. Es ist $\sup A = -\inf\{-x \mid x \in A\}$.

Lösungshinweise.

1. Nein, denn: Zum Beispiel ist $\sup\{-1,1\} = 1 \neq -1 = -\sup\{1,-1\}$.
2. Ja, denn: Man beachte zunächst, dass im vorliegenden Fall das Supremum und das Infimum von A existieren.
   - Ist a eine obere Schranke von A, d.h. gilt für alle $x \in A$ die Ungleichung $x \leq a$, so gilt auch $-a \leq -x$; d.h. $-a$ ist eine untere Schranke von $\{-x \mid x \in A\}$.
   - Umgekehrt sieht man analog, dass das additive Inverse jeder unteren Schranke von $\{-x \mid x \in A\}$ eine obere Schranke von A ist.
   - Es ist $\sup A = -\inf\{-x \mid x \in A\}$, denn: Sei nun $a := \sup A$, d.h. für jede obere Schranke b von A ist $a \leq b$. Nach obiger Überlegung ist $-a$ eine untere Schranke von $\{-x \mid x \in A\}$.

     Sei c eine untere Schranke von $\{-x \mid x \in A\}$. Dann ist $-c$ eine obere Schranke von A und daher $a \leq -c$ bzw. auch $c \leq -a$. Also ist $-a$ größte untere Schranke von $\{-x \mid x \in A\}$. Mit anderen Worten: $\sup A = -\inf\{-x \mid x \in A\}$.

Bonusaufgabe (Ein irrationales Manöver?)**.** Direkt nachdem Commander Blorx das Gravitationsfeld von e-Rule mit eiskaltem Kalkül tranzendiert hat (s. Bonusaufgabe von Blatt 6), ordnet Admiral U-O'Viel-Ill von e-Rule an, dass das Minenfeld um den Orbit von e-Rule aktiviert wird. Admiral U-O'Viel-Ill hat die Minen persönlich entworfen; sich an dem alten Sprichwort „Die Kuh liegt dicht in Err!“ orientierend, beschloss er, dass es genügt, wenn die Minen explodieren, wenn ein Raumschiff mit rationaler Geschwindigkeit vorbeifliegt.

Bei seiner Flucht von e-Rule hat das Ufo von Blorx die Geschwindigkeit (s. Bonusaufgabe von Blatt 6)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit von Commander Blorx *nicht* in $\mathbb{Q}$ liegt!

Hinweis. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt (s. Vorlesung diese Woche): Die Folge $(\sum_{k=0}^{n} x^k)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Lösungshinweise. Angenommen, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist in $\mathbb{Q}$, etwa

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{a}{b}$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$; ohne Einschränkung können wir dabei annehmen, dass $b \geq 2$ ist (sonst erweitern wir den Bruch). Wir zeigen nun, dass dann

$$z := b! \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!} \right)$$

eine ganze Zahl ist, die echt zwischen 0 und 1 liegt: Aus der Definition von z ist unschwer abzulesen, dass $z > 0$ ist. Es ist $z \in \mathbb{Z}$, denn: Nach Wahl von a und b ist

$$z = b! \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!} \right) = b! \cdot \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{k!} = a \cdot (b-1)! - \sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{k!};$$

da $b!/k!$ für alle $k \in \{0, \dots, b\}$ eine ganze Zahl ist, ist also z eine ganze Zahl.

Warum ist $z < 1$? Wir benutzen zunächst den Hinweis, um für $m \in \mathbb{N}_{>0}$ eine Abschätzung für $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!}$ in Abhängigkeit von m zu erhalten. Ist $m \in \mathbb{N}_{>0}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq m+1}$, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} &= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{(k+m+1)!} \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{(k+m+1)\cdots(m+2)} \\
&\leq \frac{1}{(m+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{(m+2)^k}.
\end{aligned}$$

Mit dem Hinweis und dem Sandwich-Satz aus Aufgabe 2 von Blatt 5 erhalten wir daher, dass

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\right) &\le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(m+1)!}\cdot\sum_{k=0}^{n-m-1}\frac{1}{(m+2)^k}\right)\\
&= \frac{1}{(m+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{m+2}}\\
&= \frac{1}{(m+1)!}\cdot\frac{m+2}{m+1}\\
&\le \frac{1}{m!\cdot m}.
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist (da $b\ge 2$)

$$z \le \frac{1}{b!\cdot b} < 1.$$

Also ist $z\in\mathbb{Z}$ und $0<z<1$; eine solche ganze Zahl kann es jedoch nicht geben. Damit folgt, dass $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ nicht rational ist.

---

keine Abgabe
(bei Fragen können Sie sich natürlich an Ihren Übungsleiter wenden
oder in der Zentralübung oder im Chat nachfragen)