Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 6 vom 10. Juni 2011

You have to develop your whole game to completion.
Isiah Thomas, *ehemaliger NBA-Profi*

Aufgabe 1 (Supremum und Addition)**.** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen.

1. Ist $\sup\{a_n + b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} + \sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$?
2. Gilt sogar $\sup\{a_n + b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} + \sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 2 (Wohldefiniertheit)**.** Einbliz und Nonewt lassen sich von der Konstruktion der reellen Zahlen durch Cauchyfolgen inspirieren:

Nonewt Ta-daa! Ich habe die Nonewt-Addition entdeckt – es ist ganz einfach: Sei Q die Menge der Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ und sei „$\square$“ die Relation auf Q, die durch die Menge

$$\Bigl\{ \bigl((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\bigr) \in Q \times Q \Bigm| a_{2012} = b_{2012} \Bigr\} \subset Q \times Q$$

gegeben ist. Dann definieren wir auf $Q/\square$ die *Nonewt-Addition* durch

$$\begin{aligned} (Q/\square) \times (Q/\square) &\longrightarrow Q/\square \\ \bigl([(a_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]\bigr) &\longmapsto \bigl[(a_{2011} + a_n + b_n + b_{2011})_{n\in\mathbb{N}}\bigr]. \end{aligned}$$

Einbliz Du hast wohl zuviel Diagonalargumente intus! Erstens ist Deine komische Relation keine Äquivalenzrelation und zweitens ist diese angebliche Addition nicht wohldefiniert!

Was ist dran an den Einwänden von Einbliz? Ist „$\square$“ eine Äquivalenzrelation auf Q ? Ist die Nonewt-Addition eine wohldefinierte Abbildung?

Aufgabe 3 (Eine „Wurzel“ aus 2011 in $\mathbb{R}$)**.** Sei $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2011\} \subset \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass die Menge A in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.
2. Sei $y := \sup A$. Zeigen Sie, dass $y^2 = 2011$ ist.

Aufgabe 4 (Eine monotone Folge)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$a_n := \Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr)^{n+1}.$$

1. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ monoton fallend ist.
2. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Produkte und Summen im Grenzwert)**.** Commander Blorx gerät durch etwas unglückliche Umstände (Angeln im Tümpel der Erkenntnis) auf dem Planeten e-Rule in Gefangenschaft; da seine Gastgeber wissen, dass man dem berüchtigten Gravitationsfeld von e-Rule nur mit Flugmanövern, die Grenzwerte von Summen inverser Fakultäten sind, entkommen kann und andererseits die Navigationskomponente des Ufos von Commander Blorx laut Manpage nur die Folge der Elemente

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und den reellen Grenzwert davon beherrscht, treffen die Sicherheitskräfte von e-Rule keine weiteren Vorkehrungen um Blorx an der Abreise zu hindern.

Solche Unvorsichtigkeit lässt Blorx natürlich nicht unbestraft – er zeigt kurzerhand, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

ist, übermittelt der Regierung von e-Rule die Nachricht „So long, and thanks for all the fish“ und überwindet mit Hilfe obiger Gleichheit das Gravitationsfeld von e-Rule.

Wie konnte Blorx obige Gleichheit beweisen?

Hinweis. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die *binomische Formel*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot x^k \cdot y^{n-k}.$$

Abgabe bis zum 17. Juni 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen