Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 7 vom 17. Juni 2011

Die Reihe meines Streichquartetts hast du richtig herausgefunden.
Das muß eine sehr große Mühe gewesen sein
und ich glaube nicht, daß ich die Geduld dazu aufbrächte.
Glaubst du denn, daß man einen Nutzen davon hat, wenn man das weiß?
Ich kann es mir nicht recht vorstellen.

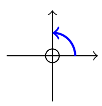
Arnold Schönberg, *Brief an Rudolf Kolisch*

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen)**.**

1. Bestimmen Sie den Real- bzw. Imaginärteil von $(2011 + i) \cdot (2011 - i)$.
2. Bestimmen Sie den Real- bzw. Imaginärteil von $1/(1 + i)$.
3. Bestimmen Sie den Real- bzw. Imaginärteil von $\overline{1/(1 + i)}$.
4. Stellen Sie Multiplikation mit der imaginären Einheit i in $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ geometrisch dar.

Lösungshinweise.

1. Wegen
$$\begin{aligned}(2011 + i) \cdot (2011 - i) &= 2011^2 - i^2 = 2011^2 + 1 = 4044122 \cdot 1\\ &= (4044122, 0)\end{aligned}$$
ist der Realteil 4044122 und der Imaginärteil ist 0.
2. Wegen
$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i = \Big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big)$$
ist der Realteil $1/2$ und der Imaginärteil ist $-1/2$.
3. Aus dem zweiten Teil erhalten wir mit Hilfe der Definition der komplexen Konjugation, dass der Realteil von $\overline{1/(1 + i)} = (1/2, 1/2)$ gleich $1/2$ ist und dass der Imaginärteil $1/2$ ist.
4. Für alle $(x, y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist
$$(x, y) \cdot i = (-y, x).$$
Fasst man $\mathbb{C}$ als reelle Ebene auf, so entspricht diese Abbildung einer Vierteldrehung gegen den Uhrzeigersinn:



Aufgabe 2 (Konvergenz von Reihen)**.** Welche der folgenden reellen Reihen konvergieren in $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils!

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2011 + 2012 \cdot n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n^{2011} + 2012}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2011^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{n + 2011}\Big)^{n^2}$

Lösungshinweise.

1. Diese Reihe divergiert, denn: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist
$$\frac{1}{2011 + 2012 \cdot n} \geq \frac{1}{2012} \cdot \frac{1}{n+1}.$$
Wenden wir nun das Majorantenkriterium mit der divergenten Minorante $\sum_{n=0}^{\infty} 1/2012 \cdot 1/(n+1)$ (harmonische Reihe!) an, so folgt, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(2011 + 2012 \cdot n)$ divergiert.

2. Diese Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, denn die Folge
$$\Big(\frac{n}{n^{2011} + 2012}\Big)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$$
ist eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$ (und das erste Reihenglied hat keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten).

3. Diese Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt
$$\frac{\Big(\frac{(n+1)^2}{2011^{n+1}}\Big)}{\Big(\frac{n^2}{2011^n}\Big)} = \frac{1}{2011} \cdot \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \frac{1}{2011}\Big(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\Big) \leq \frac{4}{2011} < 1$$
(und das erste Reihenglied hat keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten).

4. Diese Reihe divergiert, denn: Die Folge $((1 + 1/(n+2011))^{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach unten durch 1 beschränkt und daher insbesondere keine Nullfolge.

   [Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - 1/(n + 2011))^{n^2}$ ist konvergent (Majorantenkriterium angewendet auf $\sum_{n=0}^{\infty} 1/e^n$ plus Ignorieren eines geeigneten Anfangsstücks).]

Aufgabe 3 (Simultane Konvergenz von Reihen)**.** Einbliz und Nonewt kombinieren begeistert Reihen und Inverse:

Einbliz Wie schon Bianca Castafiore zu singen pflegte: „Ha, welch Glück, mich zu sehn, so schön.“. Ich habe eine wahrhaft wunderbare Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ entdeckt – für sie sind nämlich sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als auch $\sum_{n=0}^{\infty} 1/a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergente Reihen!

Nonewt Bei Dir divergiert's aber schon ziemlich absolut! So eine Folge *kann* es überhaupt nicht geben. Aber mit ein paar gekonnten Handgriffen wird daraus etwas vernünftiges: Es gibt natürlich Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ mit der Eigenschaft, dass sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als auch $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2\cdot a_n)$ in $\mathbb{R}$ konvergieren.

Können Sie weiterhelfen? Gibt es Folgen mit den von Einbliz bzw. Nonewt behaupteten Eigenschaften?

Hinweis. Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $x^2 + y^2 \geq 2\cdot x\cdot y$ (warum?).

Lösungshinweise. Der Hinweis ist eine einfache Folgerung aus der Tatsache, dass $x^2 - 2\cdot x\cdot y + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{R}_{>0}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen.

- Anhand der Definition von Nullfolgen kann man leicht ablesen, dass nicht sowohl $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen sein können. Insbesondere können nicht sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als auch $\sum_{n=0}^{\infty} 1/a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergente Reihen sein.

- *Angenommen* es wären sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als auch $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2\cdot a_n)$ in $\mathbb{R}$ konvergente Reihen; dann sind insbesondere auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n + \frac{1}{n^2\cdot a_n}\Big)$$

in $\mathbb{R}$ konvergente Reihen. Mit dem Hinweis erhalten wir: für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist

$$\begin{aligned} a_n + \frac{1}{n^2\cdot a_n} &= a_n\cdot\Big(1+\frac{1}{n^2\cdot a_n^2}\Big) = a_n\cdot\Big(1^2+\Big(\frac{1}{n\cdot a_n}\Big)^2\Big) \geq a_n\cdot 2\cdot\frac{1}{n\cdot a_n} \\ &= \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Dann folgt aber mit dem Majorantenkriterium, angewendet auf die divergente Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} 2/n$ (harmonische Reihe), dass die kombinierte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + 1/(n^2\cdot a_n))$ nicht in $\mathbb{R}$ konvergent ist, im Widerspruch zur obigen Feststellung. Also können nicht sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als auch $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2\cdot a_n)$ konvergent sein.

Aufgabe 4 (Produkte von Reihen)**.** Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch das *Cauchyprodukt*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot b_{n-k}$$

eine in $\mathbb{R}$ konvergente Reihe ist und dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Bigr) \cdot \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Bigr).$$

Gehen Sie dazu in den folgenden Schritten vor: Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die folgenden (Varianten) von Partialsummen:

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot b_{k-j} \qquad \text{und} \qquad t_n := \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_k$$

1. Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ ist $|s_n - t_n| \leq \varepsilon$.

2. Schließen Sie daraus, dass das Cauchyprodukt in $\mathbb{R}$ konvergiert und, dass man den Wert dieser Reihe wie oben angegeben berechnen kann.

Lösungshinweise. Da die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ in $\mathbb{R}$ konvergent sind, erhalten wir folgende reelle Zahlen:

$$a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad b := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$
$$\overline{a} := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|, \qquad \overline{b} := \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|.$$

Ist $\overline{a} = 0$, so folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ bereits $a_n = 0$ und das Cauchyprodukt ist somit die konstante Nullfolge; man sieht nun leicht, dass das Cauchyprodukt in diesem Fall die gewünschten Eigenschaften besitzt. Analog argumentiert man im Fall $\overline{b} = 0$. Im folgenden nehmen wir daher an, dass $\overline{a} \neq 0 \neq \overline{b}$ ist.

1. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Da die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ in $\mathbb{R}$ konvergent sind, gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N'}$ ist

   $$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot \overline{b}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot \overline{a}}.$$

   Indem man genau verfolgt, über welche Indizes summiert wird, sieht man, dass

   $$t_n - s_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=n-k+1}^{n} a_j \cdot b_k$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$ (Begründung: Nach Definition ist t_n die Summe aller Produkte $a_j \cdot b_k$ mit $(j,k) \in \{0,\dots,n\}^2$; andererseits ist s_n die Summe aller $a_j \cdot b_k$ mit $(j,k) \in \{0,\dots,n\}^2$ und $j+k \leq n$; also ist $t_n - s_n$ die Summe aller $a_j \cdot b_k$ mit $(j,k) \in \{0,\dots,n\}^2$ mit $j+k \geq n+1$).

Mit $N := 2 \cdot N'$ erhalten wir daher für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|t_n - s_n| &= \Bigl|\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=n-k+1}^{n} a_j \cdot b_k\Bigr| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=n-k+1}^{n} |a_j| \cdot |b_k| \\
&= \sum_{k=0}^{N'} |b_k| \cdot \sum_{j=n-k+1}^{n} |a_j| + \sum_{k=N'+1}^{n} |b_k| \cdot \sum_{j=n-k+1}^{n} |a_j| \\
&\leq \sum_{k=0}^{N'} |b_k| \cdot \sum_{j=N'+1}^{n} |a_j| + \sum_{k=N'+1}^{n} |b_k| \cdot \sum_{j=n-k+1}^{n} |a_j| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \cdot \sum_{j=N'+1}^{\infty} |a_j| + \sum_{k=N'+1}^{\infty} |b_k| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \\
&\leq \overline{b} \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot \overline{b}} + \overline{a} \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot \overline{a}} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

[Falls jemand übersehen hat, dass man in diesem Argument $\overline{a} \neq 0 \neq \overline{b}$ verwendet hat, sollte dies zwar angemerkt werden, aber nicht zu Punktabzug führen.]

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_k = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Nach den Grenzwertsätzen konvergiert also $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \cdot b$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann existiert nach dem ersten Teil und vorstehender Überlegung ein $N \in \mathbb{N}$ mit:

$$\begin{aligned}
\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad |t_n - a \cdot b| &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \\
\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad |t_n - s_n| &\leq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir somit: Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ ist

$$|s_n - a \cdot b| = |s_n - t_n + t_n - a \cdot b| \leq |s_n - t_n| + |t_n - a \cdot b| \leq \varepsilon,$$

d.h. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \cdot b$ (und dies entspricht der Behauptung über das Cauchyprodukt).

Bonusaufgabe (Umordnungen von nicht absolut konvergenten Reihen)**.** Commander Blorx plant, sich seinen eigenen Asteroiden zu gönnen (die entsprechende Plakette „~! sweet ~!“ hat er bereits erworben). Er inspiziert daher sein Konto bei der Bank Gru and Snag: Sein Kontoauszug belegt, dass es eine Folge von – leider nicht unbedingt positiven – Buchungen gab, deren zugehörige Reihe konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Kann Commander Blorx mit einem Schuss seiner pangalaktischen Permutationspistole die Reihenfolge der Buchungen so verändern, dass die entstehende Reihe konvergent ist und genau den Wert 2011^{2011} besitzt?

Lösungshinweise. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge (in $\mathbb{R}$) der Buchungen des Kontos von Commander Blorx und sei $A \in \mathbb{R}$ (z.B. $A = 2011^{2011}$). Wir konstruieren eine Permutation der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die zugehörige Reihe gegen A konvergiert.

Nach Voraussetzung ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zwar konvergent aber nicht absolut konvergent; insbesondere existiert daher zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}_{\geq N}$ mit $a_k \leq 0$ und ein $k' \in \mathbb{N}_{\geq N}$ mit $a_{k'} \geq 0$.

Wir definieren nun induktiv eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ wie folgt: Es sei $b_0 := a_0$, $p_0 := 0$, $q_0 := 0$ und im Induktionsschritt gehen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ folgendermaßen vor:

- Ist $\sum_{k=0}^{n} b_k \leq A$, so definieren wir (nach der obigen Vorbemerkung und dem Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$ ist dies wohldefiniert):

$$\begin{aligned} b_{n+1} &:= a_k, \text{ wobei } k \in \mathbb{N}_{>p_n} \text{ minimal ist mit } a_k \geq 0,\\ p_{n+1} &:= k,\\ q_{n+1} &:= q_n. \end{aligned}$$

- Ist $\sum_{k=0}^{n} b_k > A$, so definieren wir:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &:= a_k, \text{ wobei } k \in \mathbb{N}_{>q_n} \text{ minimal ist mit } a_k \leq 0,\\ p_{n+1} &:= p_n,\\ q_{n+1} &:= k. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, wir addieren so lange nicht-negative Folgeglieder, bis wir einen Wert $\geq A$ erhalten und addieren dann so lange negative Folgeglieder, bis wir einen Wert $< A$ erhalten, etc. (mit der offensichtlichen Indizierung).

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann eine Permutation von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} b_n$ ist konvergent mit Wert A, denn:

- Die Folge ist eine Permutation der ursprünglichen Folge, denn: Die Konstruktion stellt sicher, dass jedes Folgenglied von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ höchstens einmal in der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auftritt (hierbei spielen die Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wichtige Rolle).

  Es ist also nur noch zu prüfen, dass jedes Folgenglied von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens einmal in $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auftritt. Sei dazu $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge der positiven Folgeglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus der fehlenden absoluten Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ folgt, dass dies tatsächlich eine unendliche Folge ist und die Folge $(\sum_{k=0}^{n} c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt ist; denn wäre diese Reihe beschränkt, so wäre $(\sum_{k=0}^{n} |a_k| + \sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, wäre also auch $(\sum_{k=0}^{n} |a_k|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und daher konvergent, im Widerspruch dazu, dass die Reihe nach Voraussetzung nicht absolut konvergiert. Damit folgt, dass es zu jedem $N \in \mathbb{N}$

ein $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ mit $\sum_{k=0}^{n} b_k > A$ gibt. Also muss jedes nicht-positive Folgeglied von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auftreten (und analog für die positiven Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

[Formaler kann man dann eine enstprechende Bijektion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ aus den Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren.]

– Die Folge $(\sum_{k=0}^{n} b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen A, denn: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, da sie eine Permutation der Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad |b_n| \leq \varepsilon.$$

Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergiert, gibt es ein $M \in \mathbb{N}_{\geq N}$, an dem ein „Vorzeichenwechsel“ stattfindet, d.h. mit $\sum_{n=0}^{M-1} b_n < A$ und $\sum_{n=0}^{M} b_n > A$. Sei nun $n \in \mathbb{N}_{\geq M}$.

  – Liegt bei n ein Vorzeichenwechsel vor, so gilt

$$\left|\sum_{k=0}^{n} b_k - A\right| \leq |b_n| \leq \varepsilon.$$

  – Liegt bei n kein Vorzeichenwechsel vor, und ist $m \in \mathbb{N}_{\geq M}$ der größte Index zwischen M und n an dem ein Vorzeichenwechsel stattfindet, so ist $|\sum_{k=0}^{n} b_k - A| \leq |b_m| \leq \varepsilon$.

Daher folgt die Konvergenz.